離散数学

ブール代数

落合 秀也

前回の復習: 命題計算

- キーワード
  - 文、複合文、結合子、命題、恒真、矛盾、論理同値、条件文、重条件文、論法、論理含意

- 記号
  - P(p,q,r, …), $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\vdash$, $\Rightarrow$

今日のテーマ: ブール代数

- ブール代数
- ブール代数と束、そして、順序
- 加法標準形 とカルノー図

今日のテーマ: ブール代数

- ブール代数
- ブール代数と束、そして、順序
- 加法標準形 とカルノー図

ブール代数の法則 (公理) $< B, +, *, ', 0, 1 >$

- 交換律

  1a. a+b= b+a　　1b. a*b=b*a

- 分配律

  2a. a+(b*c)=(a+b)*(a+c)　　2b. a*(b+c)=(a*b)+(a*c)

- 同一律

  3a. a+0=a　　3b. a*1=a

- 補元律

  4a. a+a’=1　　4b. a*a’=0

ブール代数の演算、要素

- $+$
  和
- $*$
  積
- a'
  aの補元
- 0
  最小元, 零元
- 1
  最大元, 単位元

演算の優先順序

’　＞　＊　＞　＋

(*) ただし、括弧内の演算の方がさらに優先される

- 例1: a+b’*c は、a+((b’)*c)である
  - (a+b)’*c ではない
  - (a+b’)*c ではない
- 例2: a’+b*c’ は、(a’)+(b*(c’))である
  - a’+(b*c)’ ではない
  - (a’+b)*c’ ではない
  - ((a’+b)*c)’ ではない

ブール代数の例1:

- Bを2つの要素からなる集合{0,1} とし、以下で、定められる、2項演算+, * と単項演算' を持つとする
- 演算 +

  0+0 = 0,　0+1 = 1,　1+0 = 1,　1+1 = 1
- 演算 *

  0*0 = 0,　0*1 = 0,　1*0 = 0,　1*1 = 1
- 演算 '

  0' = 1,　1'=0

このとき、Bはブール代数である。

ブール代数の例2:

- Cを和集合、積集合、補集合を取る各演算で閉じている集合の集まり(=類)とする。
- Φを最小元、全体集合Uを最大元とすると、Cはブール代数となる。

(確認)ブール代数 $\langle C, \cup, \cap, {}^c, \Phi, U \rangle$ において

$a, b, c \in C$とすると、

- 交換律 $a+b= b+a$ ・・・ $a \cup b=b \cup a$
- 分配律 $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$ ・・・ $a \cup (b \cap c)=(a \cup b) \cap (a \cup c)$
- 同一律 $a+0=a$ ・・・ $a \cup \Phi=a$, $a*1=a$ ・・・ $a \cap U=a$
- 補元律 $a+a'=1$ ・・・ $a \cup a^c=U$, $a*a'=0$ ・・・ $a \cap a^c=\Phi$

は成立している。

ブール代数の法則 (定理) (公理から次を導出可能)

- べき等律

  5a. a+a=a　　5b. a*a=a

- 有界律

  6a. a+1=1　　6b. a*0=0

- 吸収律

  7a. a+a*b=a　　7b. a*(a+b)=a

- 結合律

  8a. (a+b)+c=a+(b+c)　　8b. (a*b)*c=a*(b*c)

ブール代数の法則 (定理)
(公理から次を導出可能)

- 対合律

    8. $(a')' = a$

- 補元律 (2)

    9a. $0' = 1$　　9b. $1' = 0$

- ド・モルガンの法則

    10a. $(a+b)' = a' * b'$　　10b. $(a*b)' = a' + b'$

練習: 補元の一意性

$a+x=1$ かつ $a*x=0$ ならば $x=a'$ である

証明)

$x=x+0$ 同一律
$=x+(a*a')$ 補元律
$=(x+a)*(x+a')$ 分配律
$=1*(x+a')$ 仮定から
$=x+a'$ 同一律

$a'=a'+0$ 同一律
$=a'+(a*x)$ 仮定から
$=(a'+a)*(a'+x)$ 分配律
$=1*(a'+x)$ 補元律
$=a'+x$ 同一律

$$\dfrac{\dfrac{\quad}{x=x+a'} \qquad \dfrac{\quad}{a'+x=a'}}{x=x+a'=a'+x=a'}\ \text{交換律}$$

今日のテーマ: ブール代数

- ブール代数
- ブール代数と束、そして、順序
- 加法標準形 とカルノー図

ブール代数<B, +, *, ’, 0,1>は束<B, +, * >である

- Bがブール代数であれば、以下の性質を持つ。

  - 交換律

    1a. a+b= b+a　　　1b. a*b=b*a

  - 結合律

    8a. (a+b)+c=a+(b+c)　　　8b. (a*b)*c=a*(b*c)

  - 吸収律

    7a. a+a*b=a　　　7b. a*(a+b)=a

これは束に他ならない。

復習：束(Lattice)の代数的な定義

- 集合Lを、交わり(meet)、結び(join)と呼ぶ、2項演算子 $\wedge$ と $\vee$ のもとで閉じている、空でない集合とする。

  このとき、Lが束であるのは、$\forall a, b, c \in L$ に対して、

- 交換律

  (1a) $a \wedge b = b \wedge a$ (1b) $a \vee b = b \vee a$

- 結合律

  (2a) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (2b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

- 吸収律

  (3a) $a \wedge (a \vee b) = a$ (3b) $a \vee (a \wedge b) = a$

  が成り立つときである（そして、これを束の公理とする）。

- 束Lのことを、$(L, \wedge, \vee)$と表すことがある。

ブール代数は有界な束 ($\forall a \in B,\ 0 \lesssim a \lesssim 1$)

- Bは束である、と

  6a. $a+1=1$ 6b. $a*0=0$ （有界律）

  が成り立つ、から、

  6a. $a+1=1$ は、$a \lesssim 1$

  6b'. $0*a=0$ は、$0 \lesssim a$

  である、と言える。

ちょっとここで、束の上の順序

$a+b=b$ ならば $a \lesssim b$

$a*b=a$ ならば $a \lesssim b$

- 0を最小元、1を最大元と呼ぶ理由は、上記にある。

復習: 束の上の順序

- 束Lに対しては、

  $a \vee b = b$ ならば $a \lesssim b$

  という順序を定義することができる。

$a+b=b$ ならば $a \lesssim b$

- これは

  束Lに対しては、

  $a \wedge b = a$ ならば $a \lesssim b$

  という順序を定義することができる。

  と言い換えてもよい(ことは示した)

$a*b=a$ ならば $a \lesssim b$

ブール代数 = 束, 有界, 分配, 相補

- 交換律 : a+b= b+a
- 結合律 : (a+b)+c=a+(b+c)
- 吸収律 : a+a*b=a

束であるための条件

- 有界律 : a+1 =1
- 分配律 : a+(b*c)=(a+b)*(a+c)
- 補元律 : a+a’=1

(*) 双対の関係にある法則は省略する

- 上記の性質を満たす束を、特にブール束と呼ぶ

ブール代数の半順序

- ブール代数において、以下の各式は同値である:

$$(1)\ a+b=b, \quad (2)\ a*b=a$$

$$(3)\ a'+b=1, \quad (4)\ a*b'=0$$

これらは、すべて、$a \lesssim b$であることを意味している。

(1), (2) の同値関係は、束であれば明らか(3日目の講義で説明済み)。

(1), (2)に、有界律、分配律、補元律を適用すれば、(3), (4)が同値関係にあることを示せる。

練習:

a+b=b と a’+b=1 が同値であることを証明せよ

1. a+b=bであると仮定する

   このとき、

   $a'+b=a'+(a+b)=(a'+a)+b=1+b=1$

   である。

2. a’+b=1であると仮定する

   このとき、

   $a+b=1*(a+b)=(a'+b)*(a+b)=(a'*a)+b=0+b=b$

   である。

以上から、a+b=b と a’+b=1は同値である

例：命題計算の含意 (P⇒Q) によって作られる順序

- 命題計算のブール代数を考える。
  - 選言∨、連言∧、否定¬の各演算で閉じている命題の集まりを考え、Fを零元、Tを単位元とすると、これはブール代数となる。

- PがQを含むとは、Pが真であればQが真であることであり、P⇒Qと書くが、これは、

$$P \vee Q = Q$$

$a+b=b$ は $a \lesssim b$

である。

これは、つまり、$P \lesssim Q$ であることを意味している。

今日のテーマ: ブール代数

- ブール代数
- ブール代数と束、そして、順序
- 加法標準形 とカルノー図

加法標準形 (2変数の場合)

- ブール代数において、変数x, yによって作られるブール式E(x,y)は、変数x, yおよびその補元で作られる積の和、つまり、

$$E(x,y)=axy+bx'y+cxy'+dx'y'$$

(ただし、a, b, c, d は 0 または 1 の定数)

で表現可能である

なお、ここでは、x*y を xy と表現している(*は省略)。

- a, b, c, dは0か1の定数であるが、通常は、0であればその項は表記せず、1のときにその項を表記する。
- 上記の表現を(完全)加法標準形と呼ぶ。

練習(確認のため)

- $E(x,y)=xyx+y$ を加法標準形で表せ

- 解

  $E(x,y)=xyx+y$

  $=xxy+y$

  $=xy+(x+x')y$

  $=xy+xy+x'y$

  $=xy+x'y$

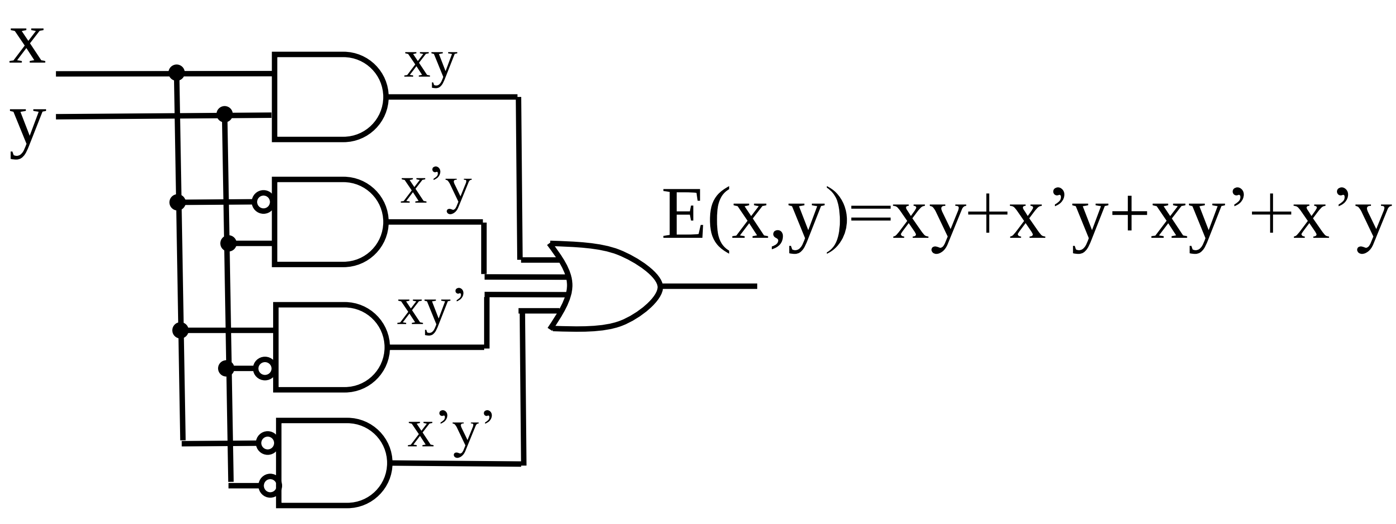
  よって、$E(x,y)= xy+x'y$

加法標準形 と 論理回路

加法標準形のブール式

$$E(x,y)=xy+x'y+xy'+x'y'$$

は、以下の論理回路で実装できる



任意のブール式を加法標準形で表現できる事実は、
任意のブール式を上記形式の論理回路に実装できることを意味する。

リテラル、基本積、加法標準形

- リテラル
  - 変数 または 補変数のこと
  - 例: x, y, z, x’, y’, z’

- 基本積
  - リテラル自身または2つ以上のリテラルの積
    - ただし同じ変数を含まない
  - 例: xy, xy’, xz, y’zw
  - 基本積ではないもの ・・・ xx’yz, xyzx

- （完全）加法標準形
  - 基本積の和で表現されたブール式で、各基本積が変数をすべて含んでいるもの。

カルノー図による表現

例: $E(x,y) = xy' + x'y'$ の表現

	y	y'
x		✔
x'		✔

式に含まれている基本積に✔をつける

または

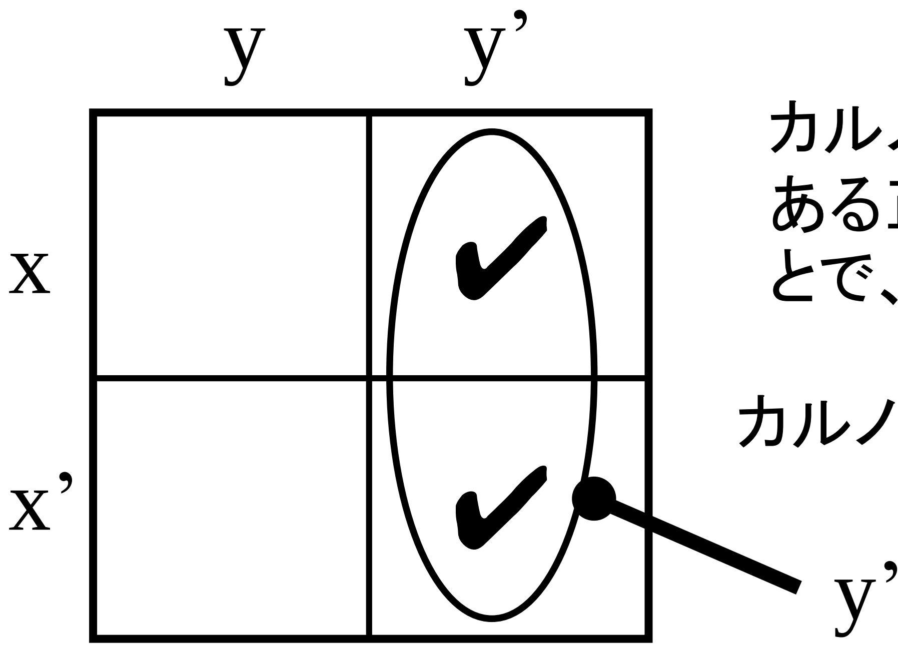
xy	
xy'	✔
x'y'	✔
x'y	

隣接している
(ちょうど一つのリテラルが異なる)

ブール式の簡略化

$E(x,y) = xy' + x'y'$ のようにブール式が与えられた場合:

$E(x,y)=xy'+x'y' = (x+x')y' = y'$ と、まとめる演算を行うことで、より簡易に表現することができる。



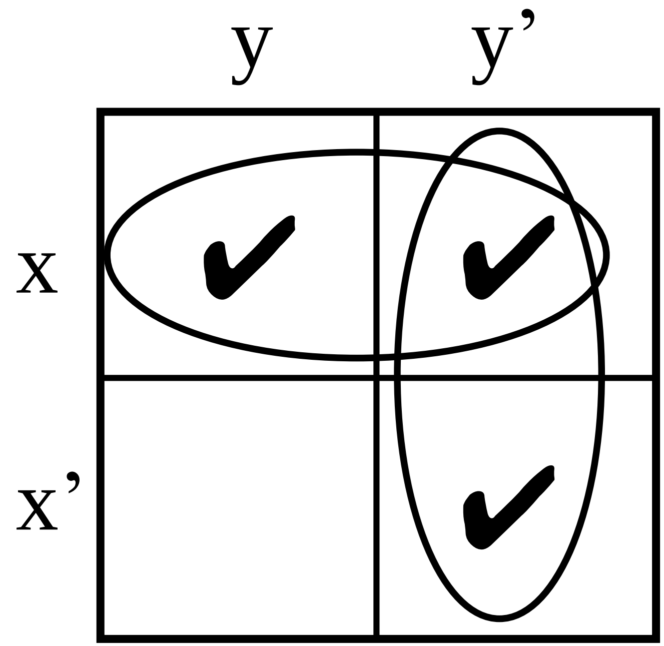
カルノー図を描き、隣接して✔がある正方形をグループ化することで、視覚的に発見できる。

カルノー図から式を起こすことも可能

$$E(x,y)=y'$$

E(x,y)=xy+xy’+x’y’の場合

- カルノー図で次のように表現できる

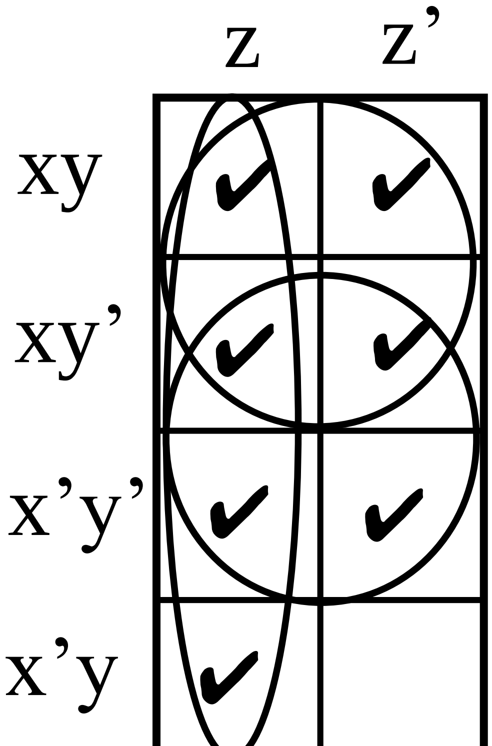


- 従って、E(x,y) = x + y’ と簡略化できる。

応用: 3変数の場合

- 加法標準形で表現された以下のブール式E(x,y,z)の簡略化を試みる

$$E(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z + xy'z' + x'y'z'$$

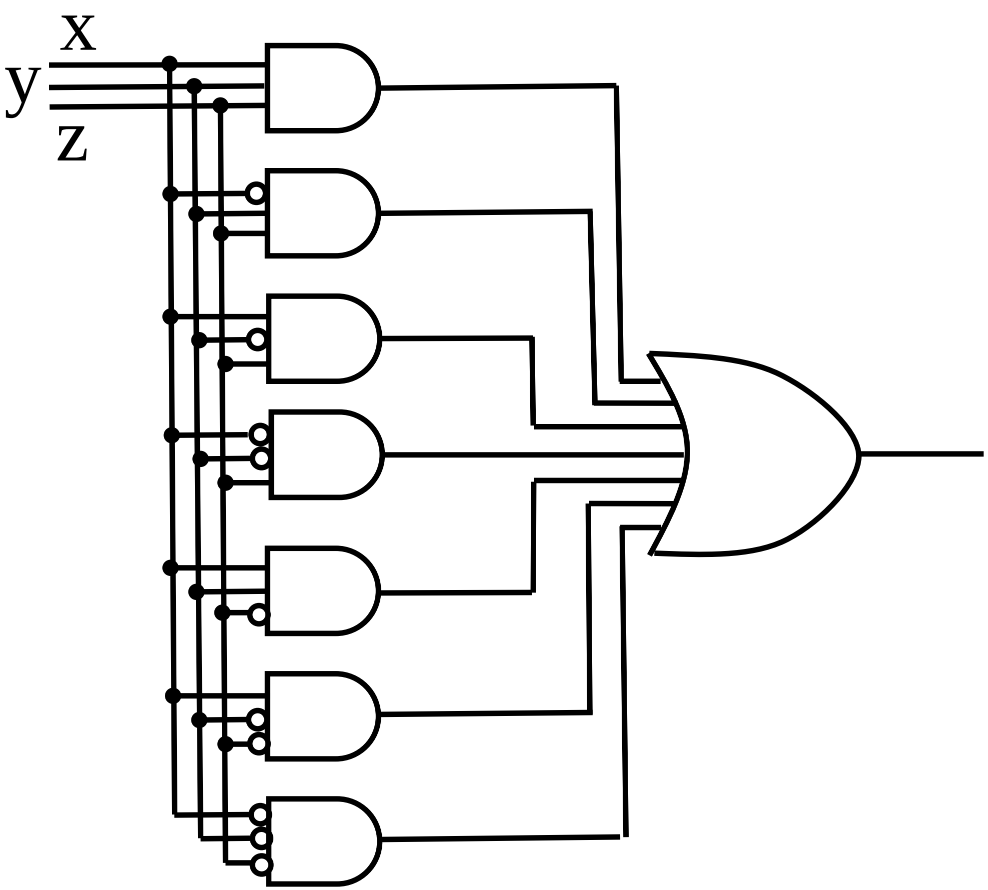


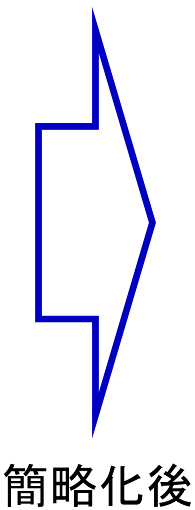
カルノー図を描いてみると左図のようになる。
従って、

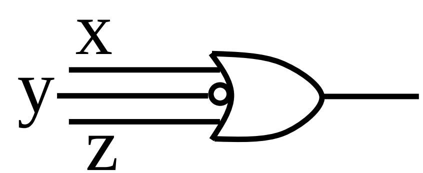
$$E(x,y,z) = x + y' + z$$

簡略化前後での回路の違い

E(x,y,z) = xyz + xyz'+xy'z+x'yz+x'y'z+xy'z'+x'y'z'



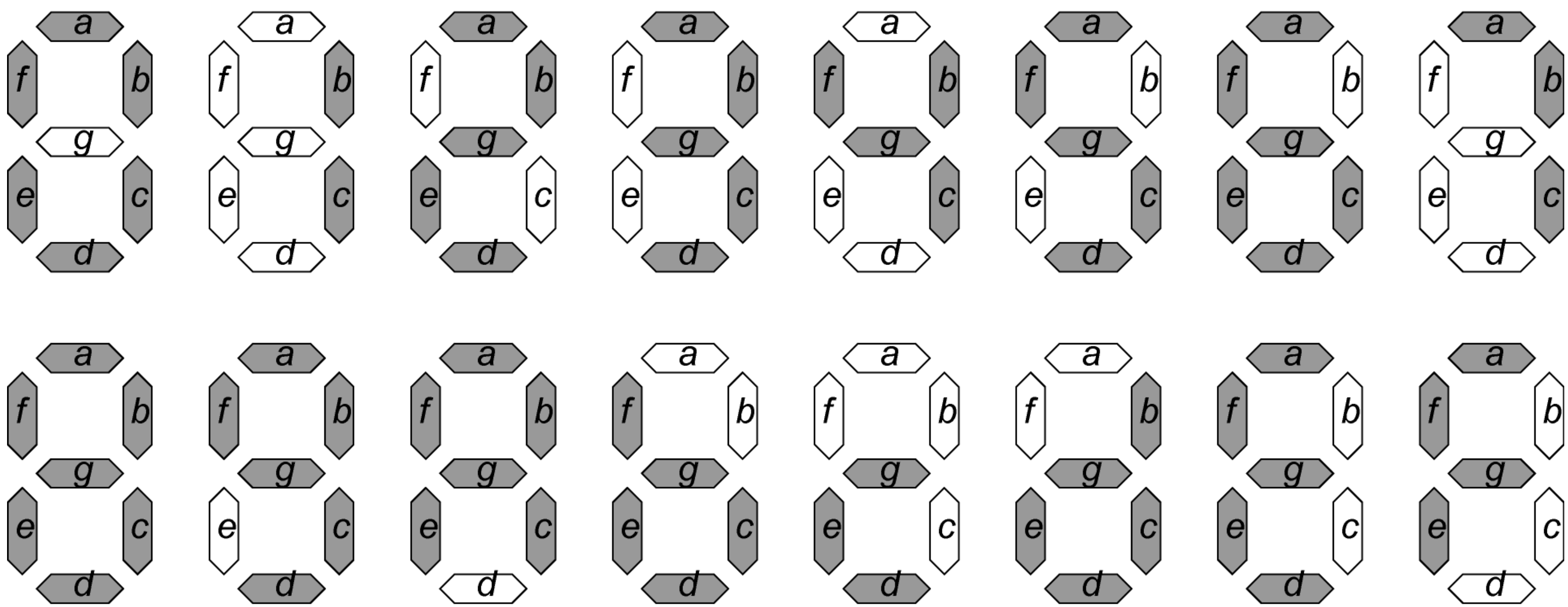




E(x,y,z)=x+y'+z

問題: 7セグメントLEDドライブ回路

x,y,z,w をそれぞれブール代数の変数とする。
いま、xをビット0、yをビット1、zをビット2、wをビット3を表すこととし、その状態に応じ、
7セグメントLEDを以下のように点灯させたい、とする。
このときに、セグメントgへの出力を(完全)加法標準形で表せ。
そして、カルノー図を用いて簡略化し、(余力があれば)論理回路に実装せよ。
例: (w, z, y, x) = (0,1,0,1) は 5 を意味する。この場合、セグメントgは、1である。



引用: http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/johzu/joho/Y2008/SevenSegmentsLED/SevenSegmentsLED/sevenSegmentsLED.bmp

解答 (1/2)

- 求める出力をYg(w,z,y,x)とする。

  Yg(0,0,0,0)=0, Yg(0,0,0,1)=0, Yg(0,0,1,0)=1,
  Yg(0,0,1,1)=1, Yg(0,1,0,0)=1, Yg(0,1,0,1)=1, …

  などであるから、

$$Yg(w,z,y,x)=x'yz'w'+xyz'w'+x'y'zw'+xy'zw'+ x'yzw'+x'y'z'w+xy'z'w+x'yz'w+ xyz'w+x'y'zw+xy'zw+x'yzw+xyzw$$

  となる

  ・・・ これが加法標準形である

解答 (2/2)

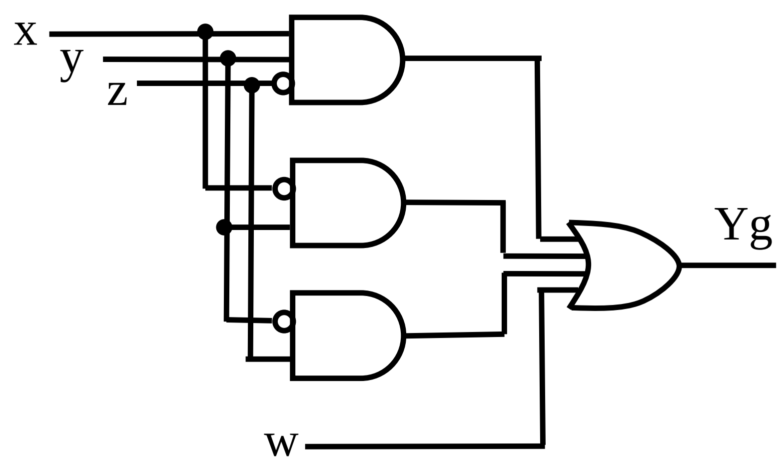
- Yg(w,z,y,x)をカルノー図で表現すると以下の通り

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy	✔		✔	✔
xy'	✔	✔		✔
x'y'	✔	✔		✔
x'y	✔	✔	✔	✔

従って

$Yg(w,z,y,x)=w+x'y+y'z+xyz'$

論理回路は



改良余地あり