離散数学

平面グラフ

落合 秀也

今日の内容

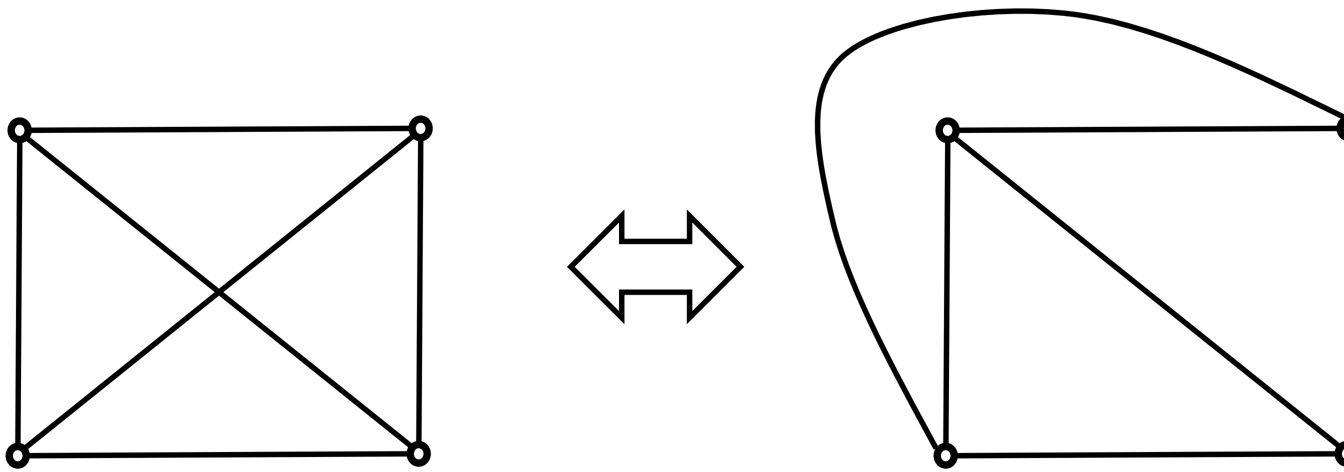
- 平面的グラフ、平面グラフ、彩色、四色定理
- ボロノイ図
- ドロネー図

今日の内容

- 平面的グラフ、平面グラフ、彩色、四色定理
- ボロノイ図
- ドロネー図

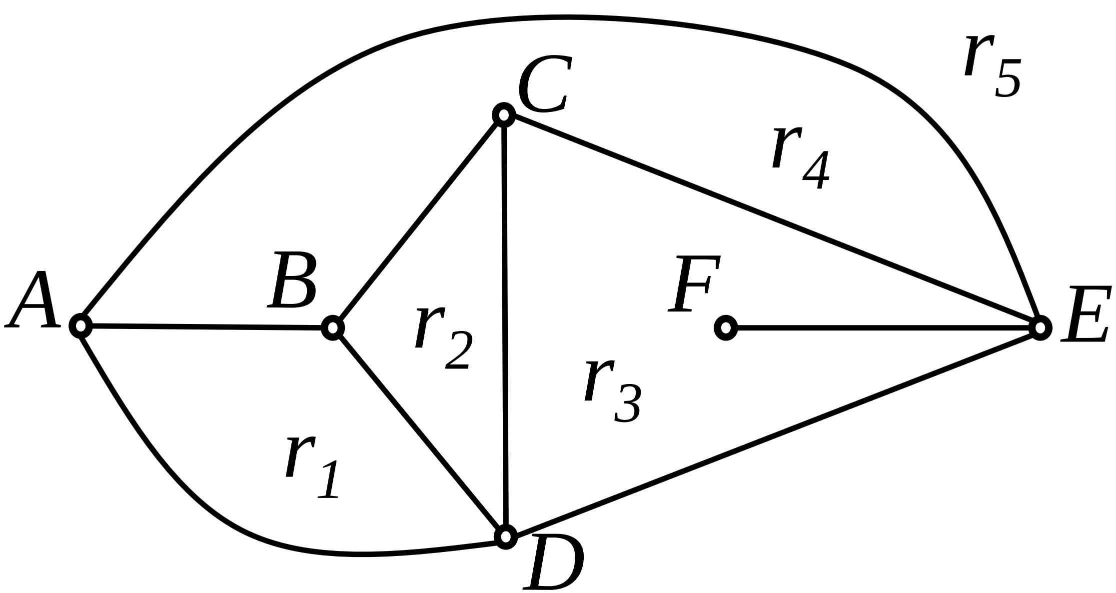
平面的グラフ(Planar Graph)とは

- 平面上に辺が交差しないように描けるグラフ（または多重グラフ）のこと



平面グラフ(Plane Graph) or 地図

- 有限多重グラフを平面上に表現したもの (平面表現)
- 平面グラフは、平面をいくつかの領域に分割する
- 領域rの次数 deg(r)とは、領域を構成する閉じた歩道の辺の数
  - 次数の総和に関する性質: $\sum \deg(r) = 2\,|E|$



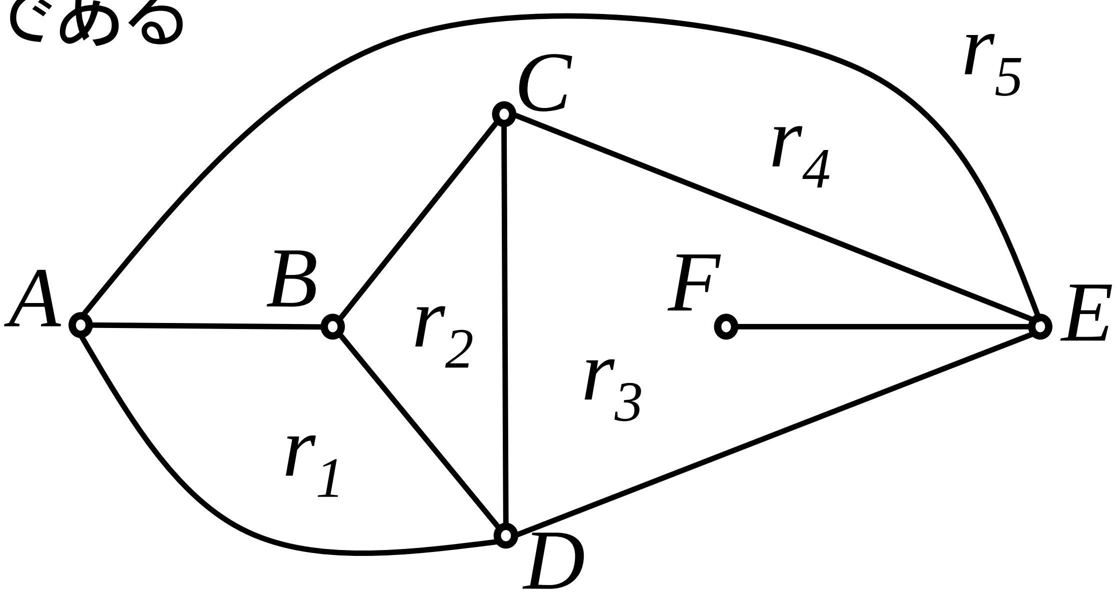
$\deg(r_1)=3$
$\deg(r_2)=3$
$\deg(r_3)=5$
$\deg(r_4)=4$
$\deg(r_5)=3$

オイラーの公式

- 連結な平面グラフにおいて、頂点の個数V、辺の本数E、領域の個数R とするとき

$$V-E+R=2$$

である



左図において
・頂点数 = 6
・辺の数 = 9
・領域数 = 5
（確かに

6-9+5=2

が成立）

オイラーの公式の証明

(a)のケース: V=1, E=0, R=1 ➔ V-E+R=2

平面グラフは、(b)(c)を組み合わせることで構成できる

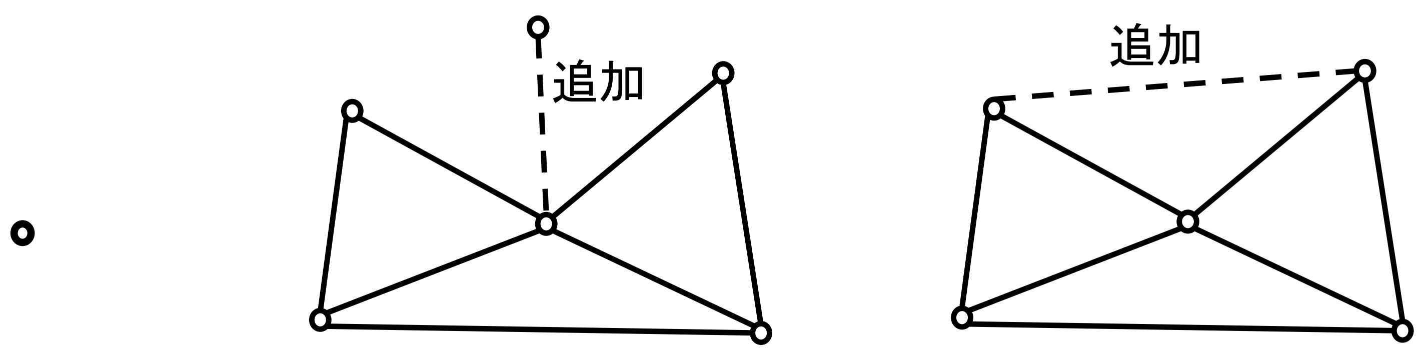
(b)のケース: V, Eはそれぞれ+1、Rは変化しない

➔ V-E+Rは変化しない

(c)のケース: Vは変化しない E, Rはそれぞれ+1

➔ V-E+Rは変化しない

よって V-E+R=2 である

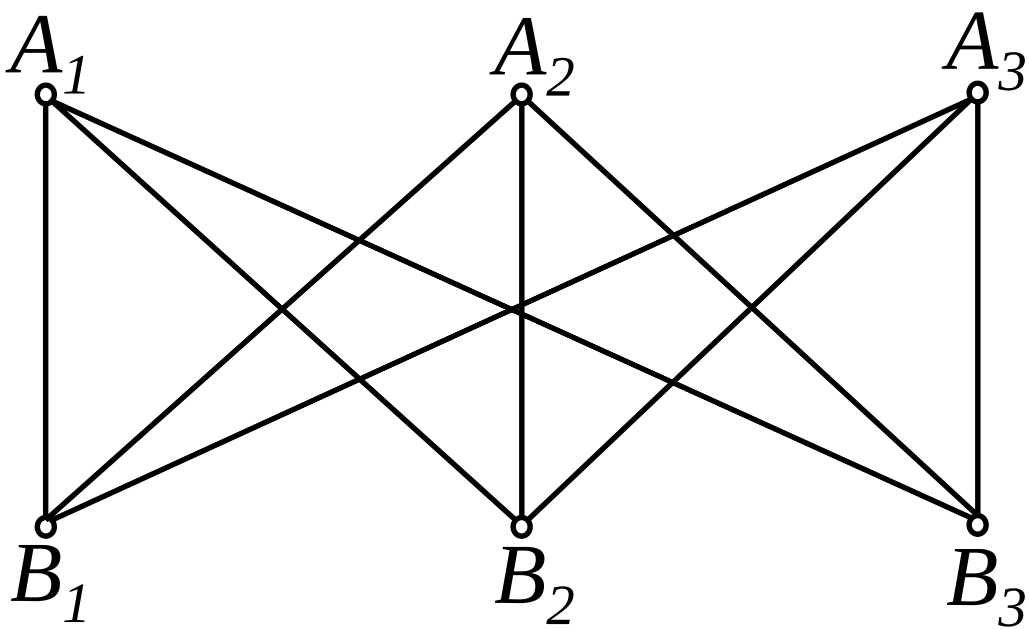


(a) (b) (c)

非平面的グラフの例

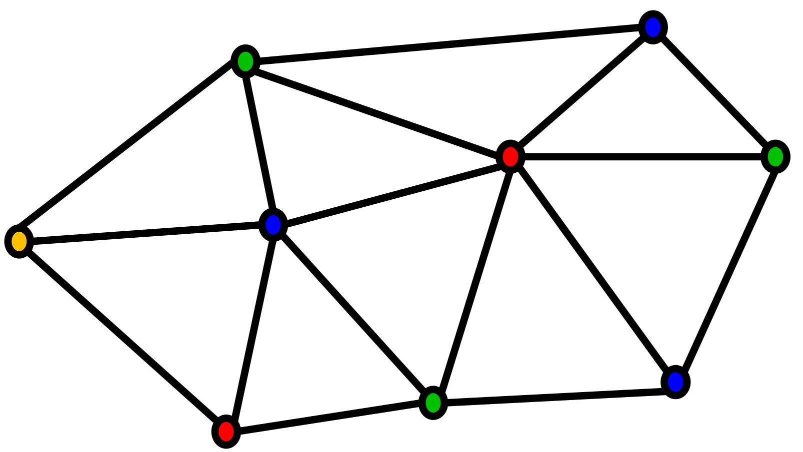
- 以下のグラフは平面的ではない。

(理由) 平面的グラフであるとすると、V=6, E=9なので、オイラーの公式より、平面表現ではR=5個の領域を持つ。どの3頂点も互いに結ばれていない(領域ができるなら4辺以上)ことに着目すると、領域の次数の総和は20以上。これは、平面グラフであれば、辺の数が10以上であることを意味し、E=9と矛盾する。



彩色グラフ: 頂点彩色

- 頂点彩色 (vertex coloring)
  - 隣り合う頂点を異なる色で塗ること
  - n色で塗れれば、n-彩色可能(n-colorable) であると言う。

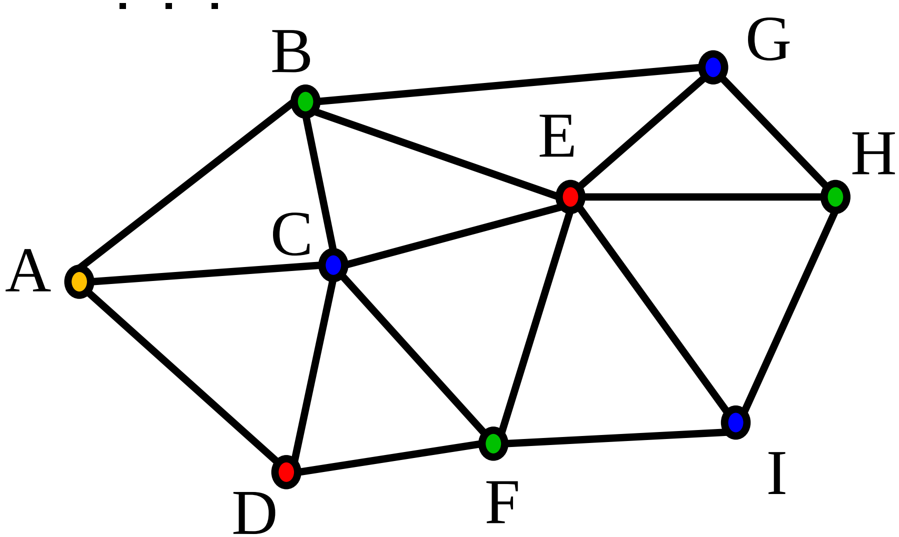


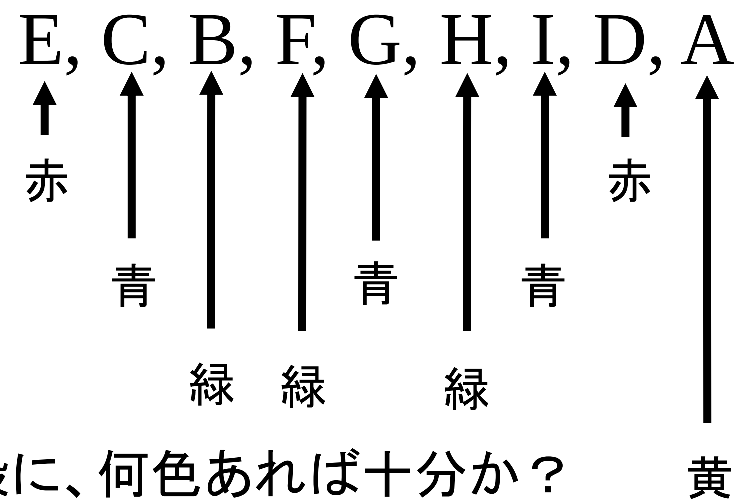
このグラフの場合
4-彩色可能

Welch-Powellのアルゴリズム

- グラフの頂点を、次数の大きい順に並べる
- 1番目の頂点を塗るのに1番目の色を使う、その頂点に隣接していない頂点を順に1番目の色で塗っていく
- 2番目の色を用いて、同様の操作を繰り返す
- 3番目の色を用いて、同様の操作を繰り返す

・・・

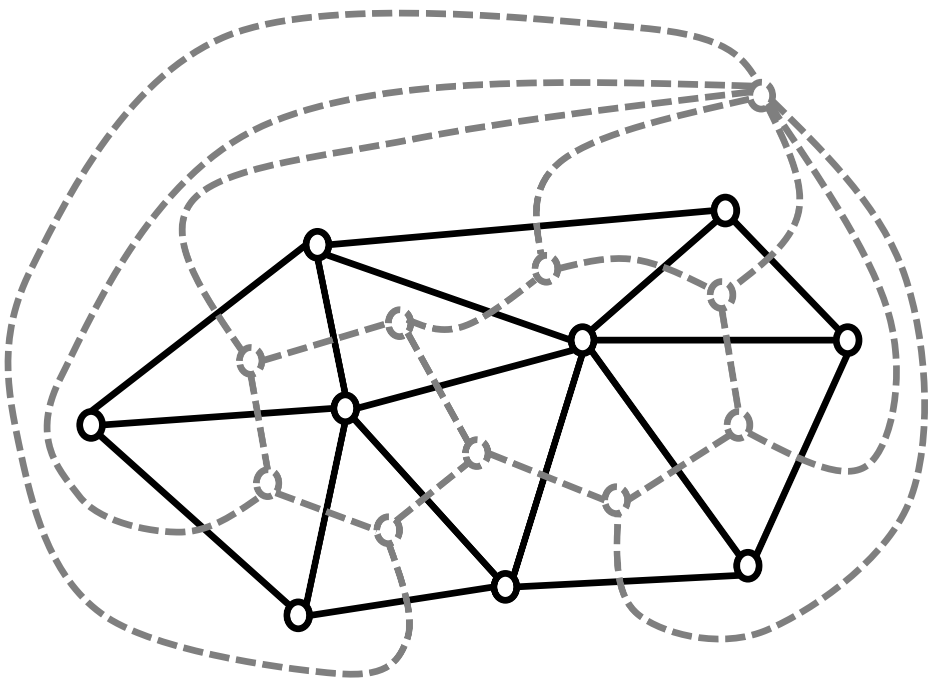


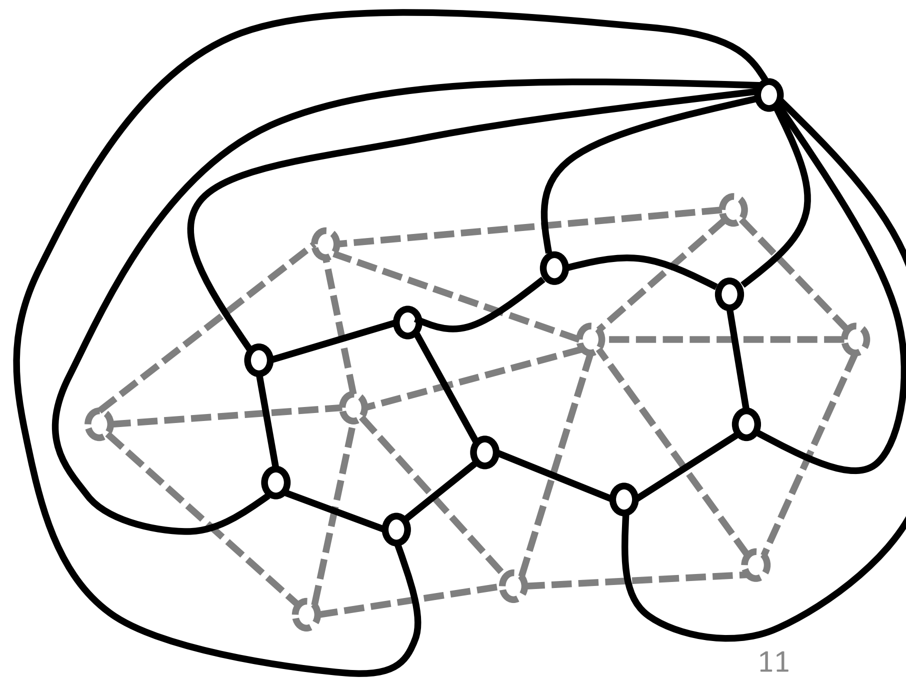


一般に、何色あれば十分か？
➔ 四色定理(後述)へ

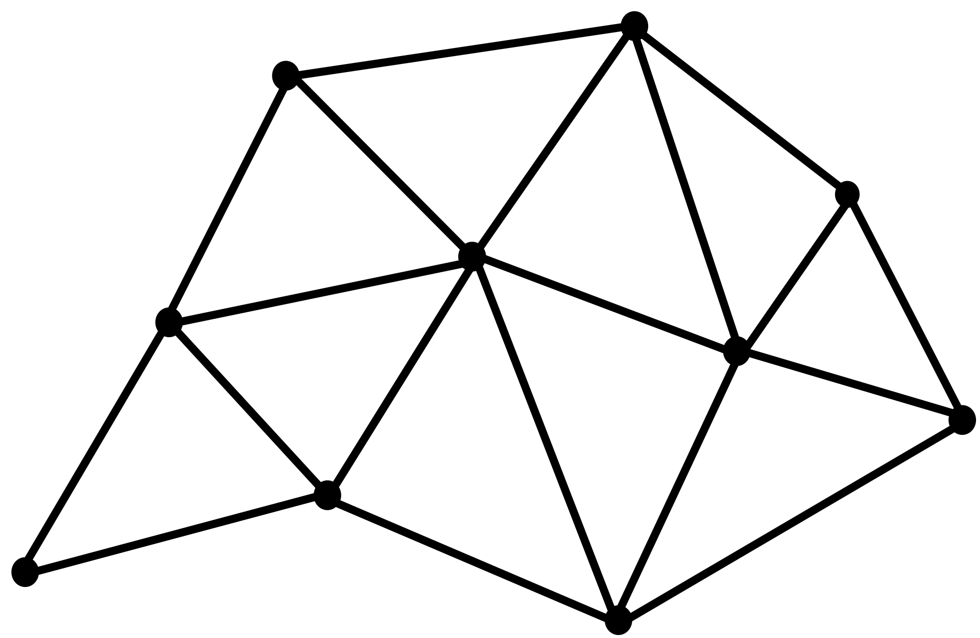
双対グラフ (Dual Graph)

- 平面グラフMの各領域に1つの点を取り、隣接する2つの領域の点を、その隣接する辺に交差する辺で結ぶグラフM*は、Mの双対と呼ばれる。

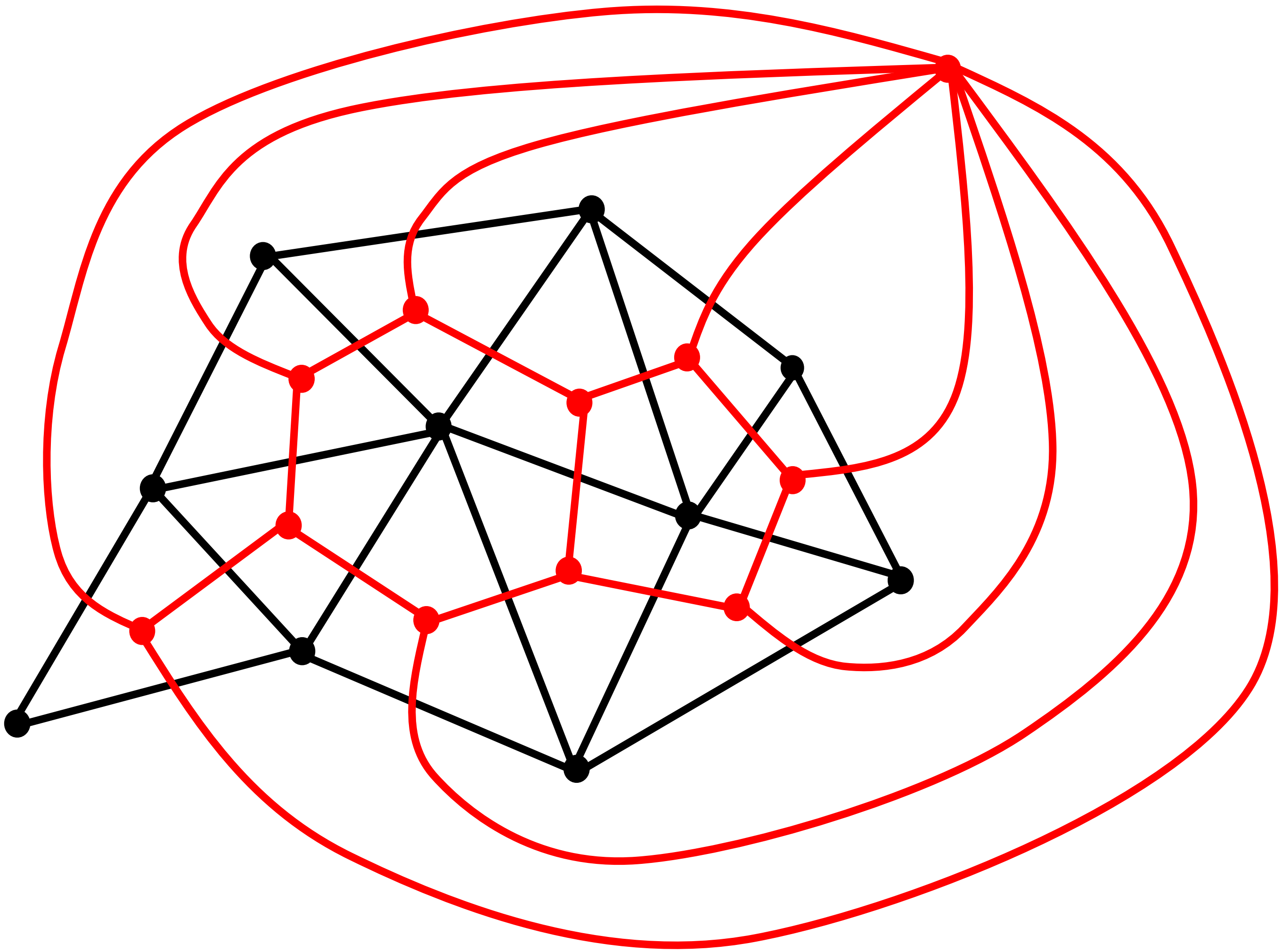




練習：以下の平面グラフの双対グラフを作成せよ

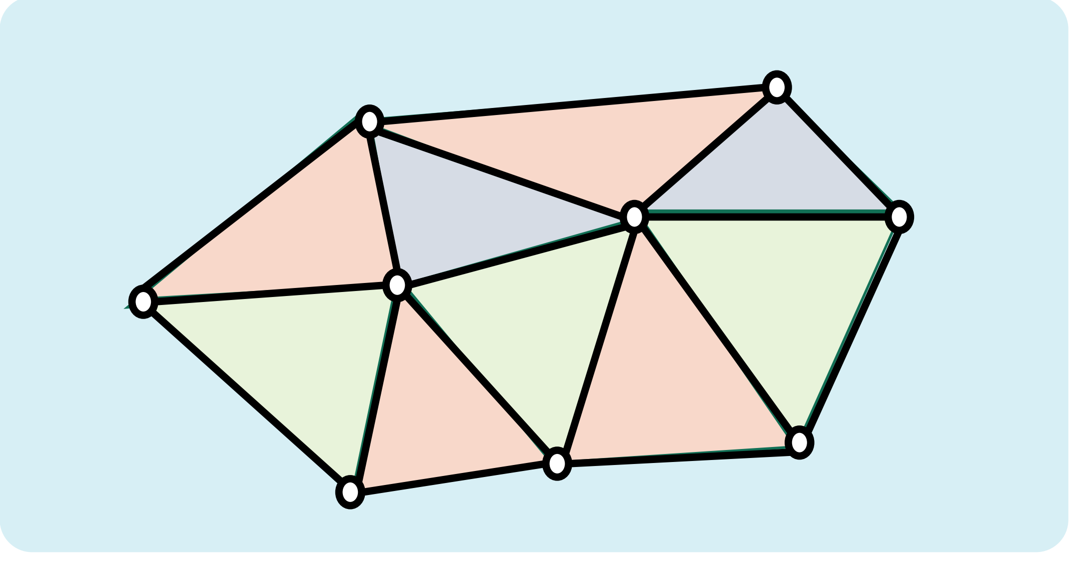


解：



平面グラフの彩色：面彩色

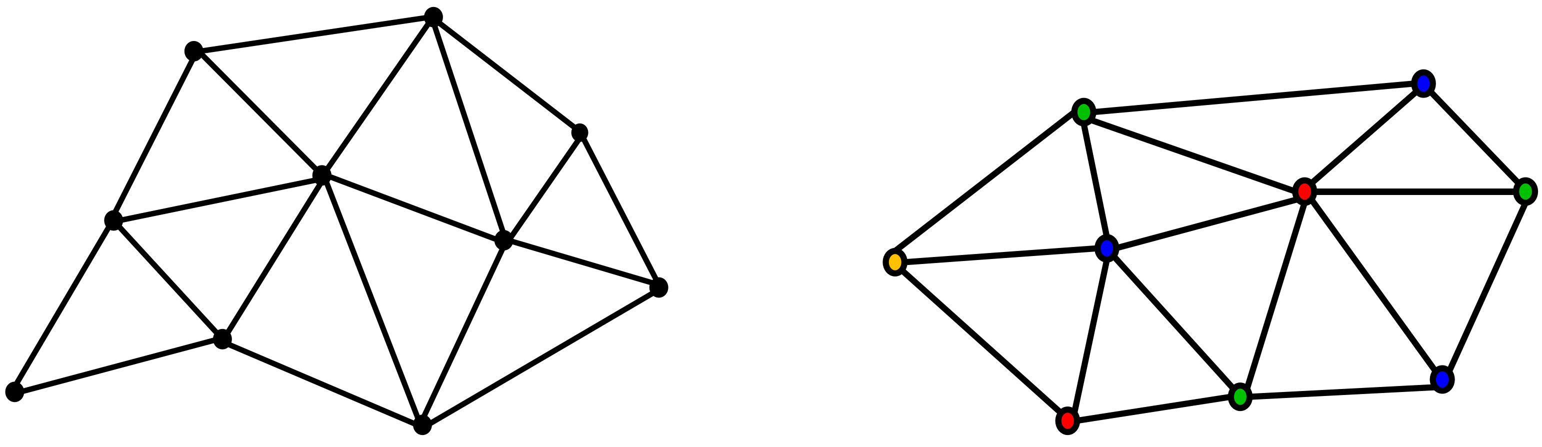
- 面彩色(face coloring)
  - 隣り合う領域を異なる色で塗ること
  - n色で塗れれば、n-面彩色可能 であると言う。



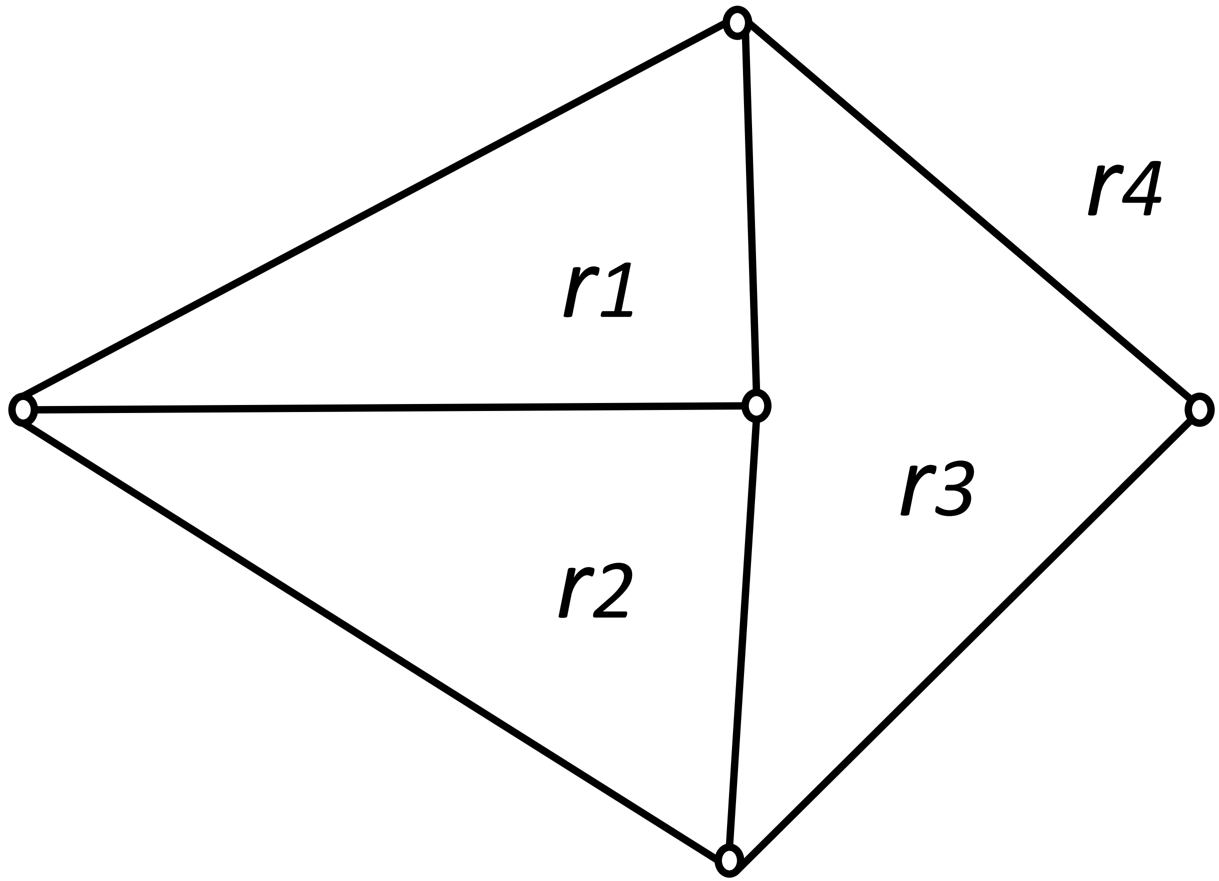
- 双対グラフを作って、Welch-Powell の頂点彩色アルゴリズムを適用、頂点の色を領域の色に対応づけする

四色定理

- 平面グラフの隣接した領域を異なる色となるように彩色したとき、５色以上を必要としない
- すべての平面グラフは 4-彩色可能である



実験：以下のグラフは4-面彩色可能であることを確かめよ

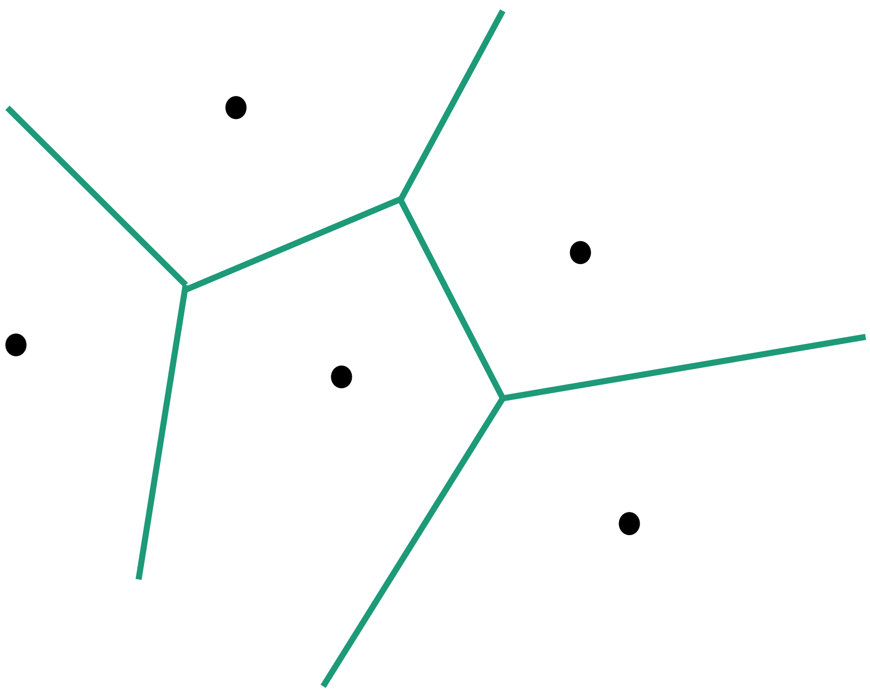


今日の内容

- 平面的グラフ、平面グラフ、彩色、四色定理
- ボロノイ図
- ドロネー図

ボロノイ図 (Voronoi Diagram)

- 距離を定義可能な空間に、複数の点（母点）が与えられたときに、その他の点が、どの母点に近いかで領域分けされた図



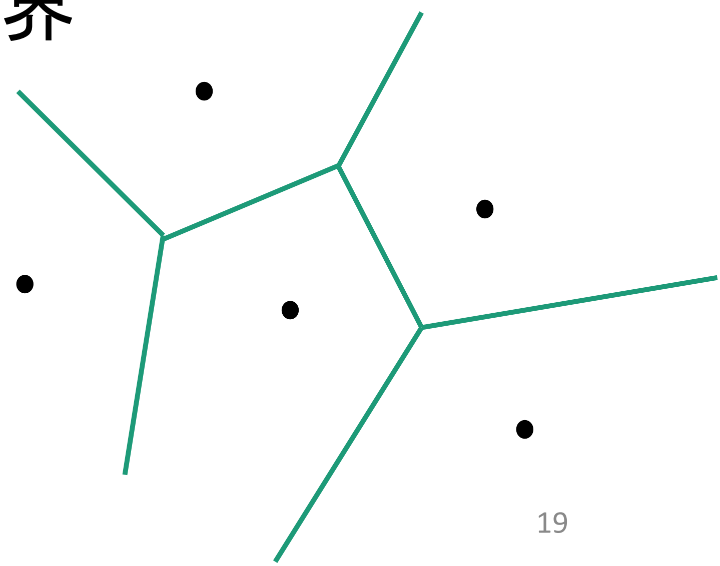
ボロノイ図の定義

- 距離空間の有限部分集合 $P=\{p_1, \ldots, p_n\}$ および距離関数$d(p_i,p_j)$ が与えられたとする。このとき、

$$Ri = \{\ x \mid d(x,p_i) \leqq d(x,p_j),\ i \neq j\}$$

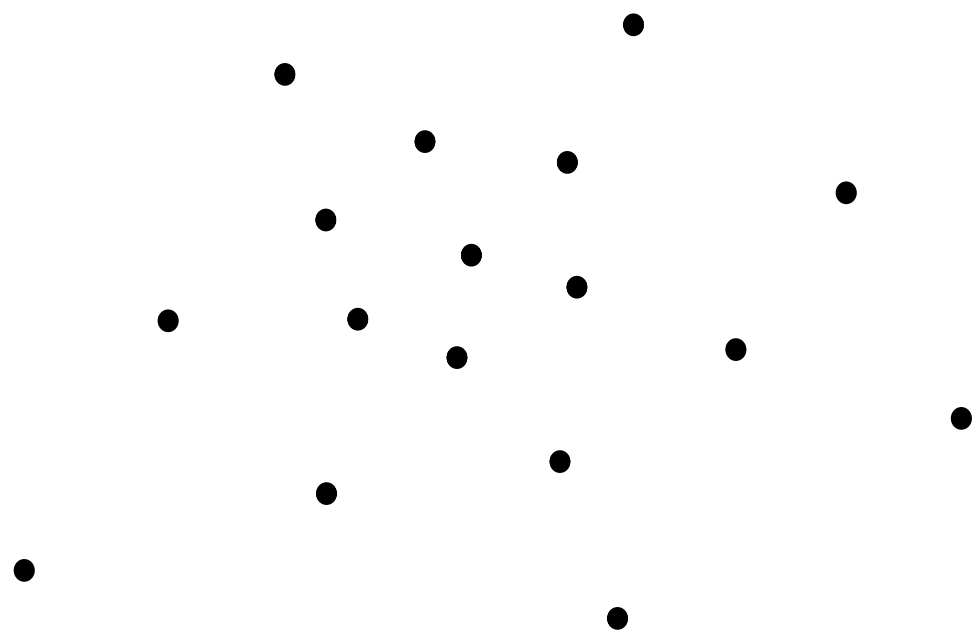
で定義される領域 Ri をボロノイ領域と呼び、集合 $\{Ri\}$ をボロノイ図と呼ぶ。

- ボロノイ領域の境界: ボロノイ境界
- ボロノイ境界の交点: ボロノイ点

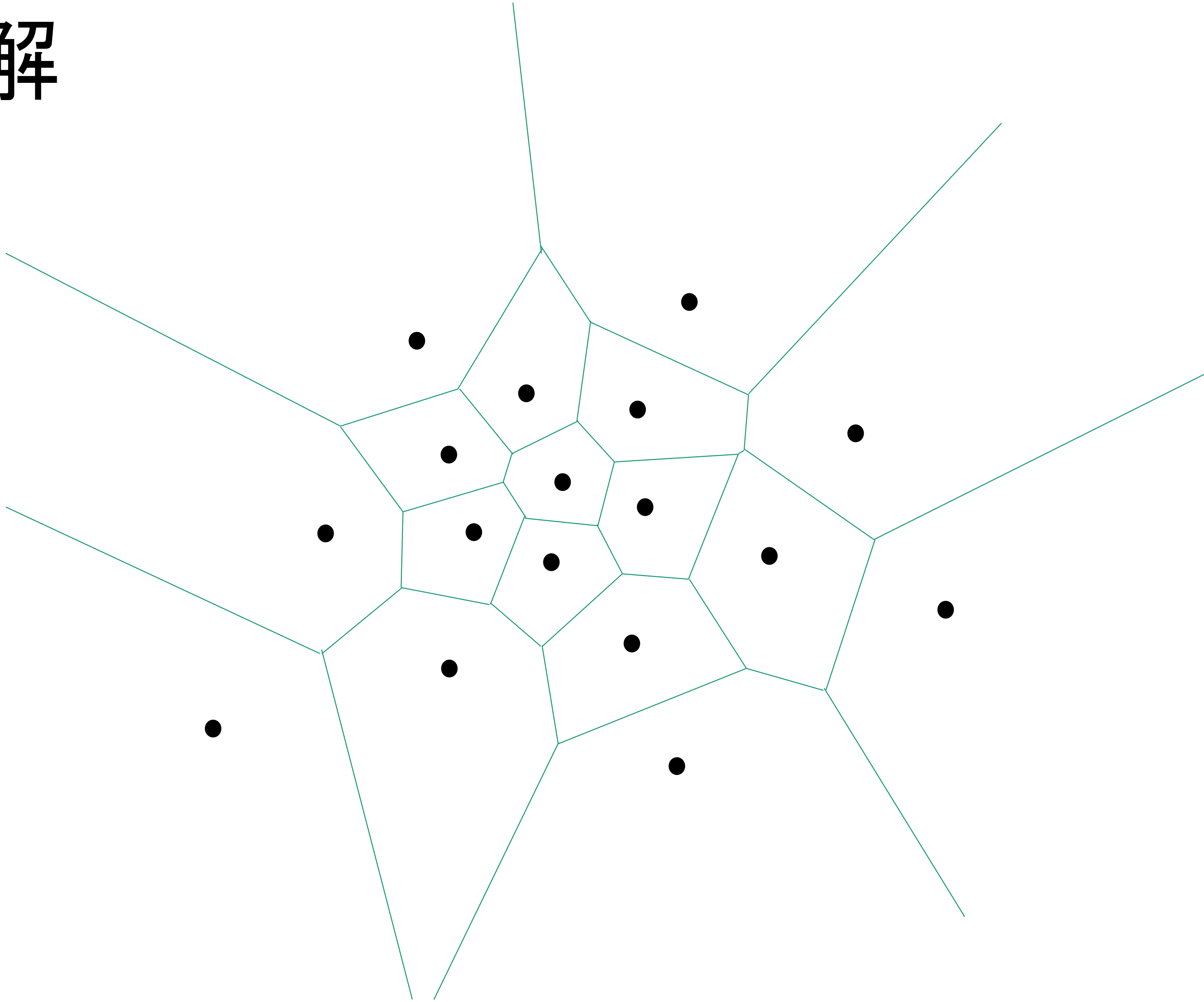


練習

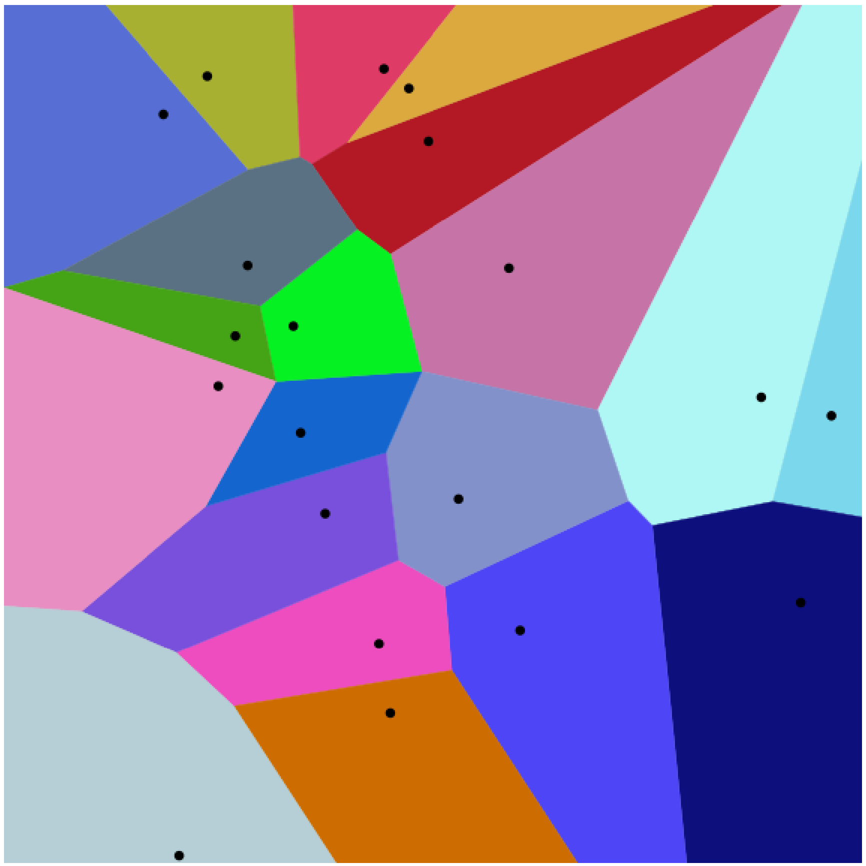
- 以下の母点に対して、（おおよその）ボロノイ図を作成してみよ。距離関数としてはユークリッド距離を用いてみよ。



解



ボロノイ図: 距離関数の違い



ユークリッド距離

$d(p_1, p_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

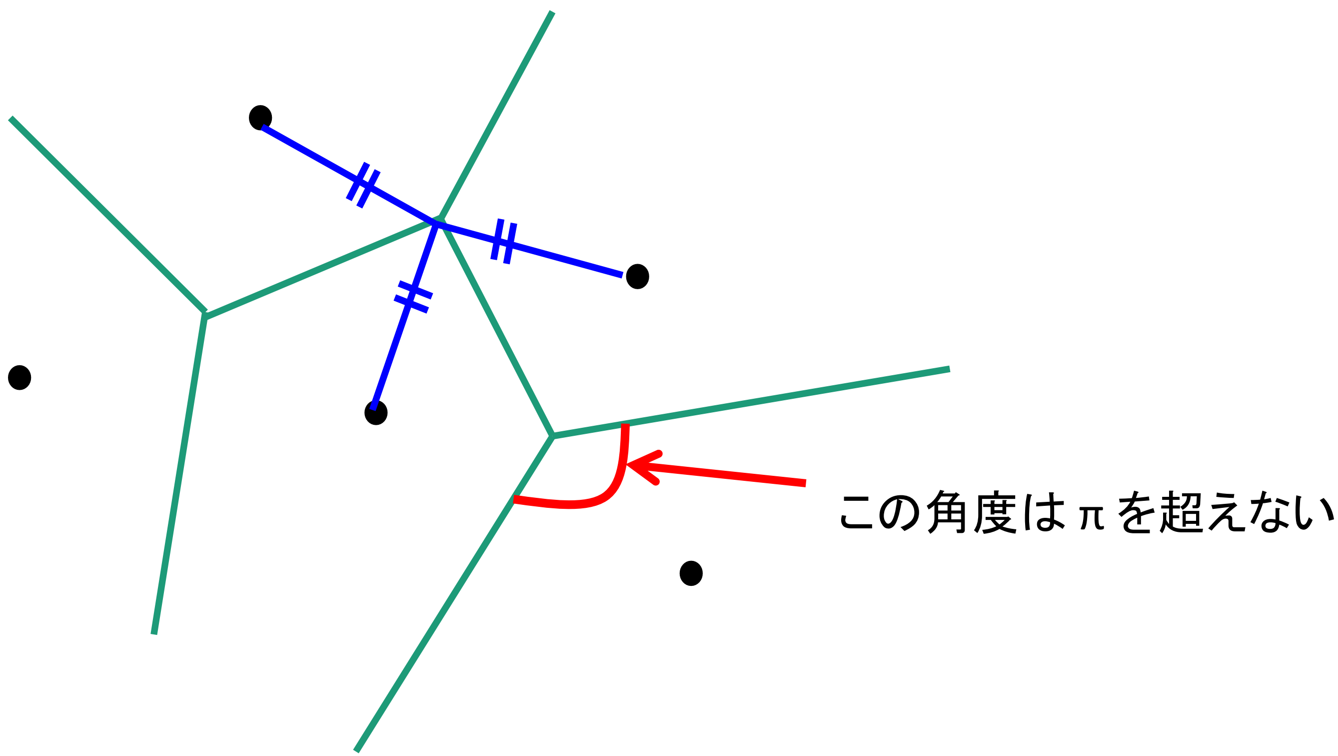
マンハッタン距離

$d(p_1, p_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

引用: https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram

ボロノイ図の特徴･性質

- ボロノイ点から周辺各領域の母点までの距離は等しい
- ボロノイ領域は凸領域である

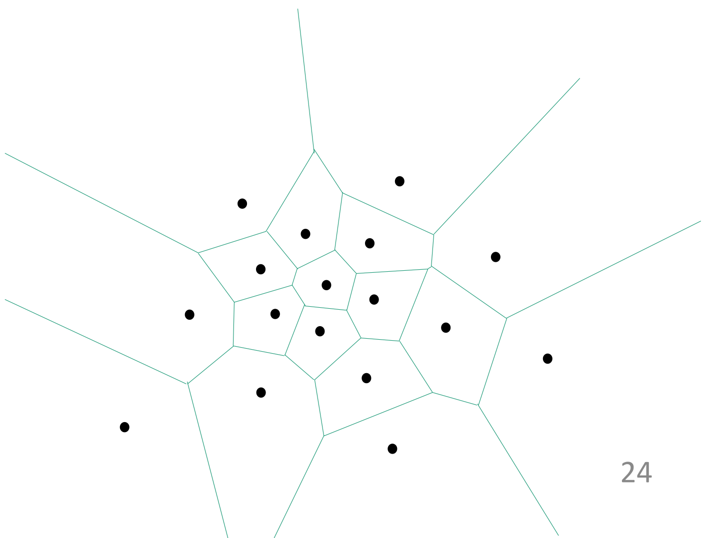


ボロノイ図の応用

- 最近傍探索（Nearest Neighbor Search）
  - ある地点に最も近い母点を探す
    - 最も近い基地（病院、ガソリンスタンド、レストラン etc.）を探す

- 無線通信基地局の配置
  - 無線端末が、最も近い基地局に接続されると仮定すると、その基地局が通信する端末数 = 領域に含まれる端末数と考えることができる。

- 自律ロボットのナビゲーション
  - 母点: 障害物
  - ボロノイ境界: 最も安全なルート

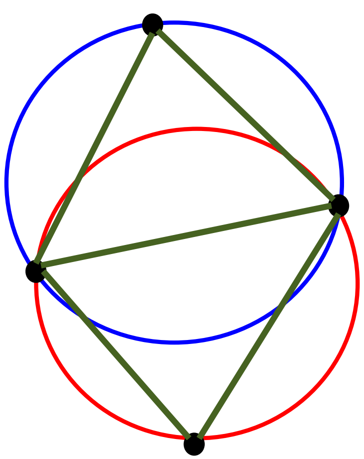


今日の内容

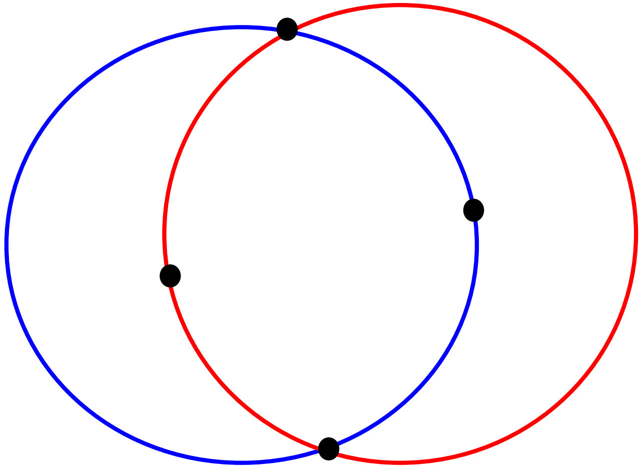
- 平面的グラフ、平面グラフ、彩色、四色定理
- ボロノイ図
- ドロネー図

ドロネー図 (Delaunay Diagram)
ドロネー三角形分割 (Delaunay Triangulation)

- 母点3点が円周上に乗る円を、その内部に他の母点が入らないように作成できるときに、それらの3点を線で結んでできる図
- 面を3角形で分割することができる
- ただし、3点が1直線上に並ぶ場合や
  4点が同一円周上に並ぶ場合 (5点～も同様)も含む



正しい例



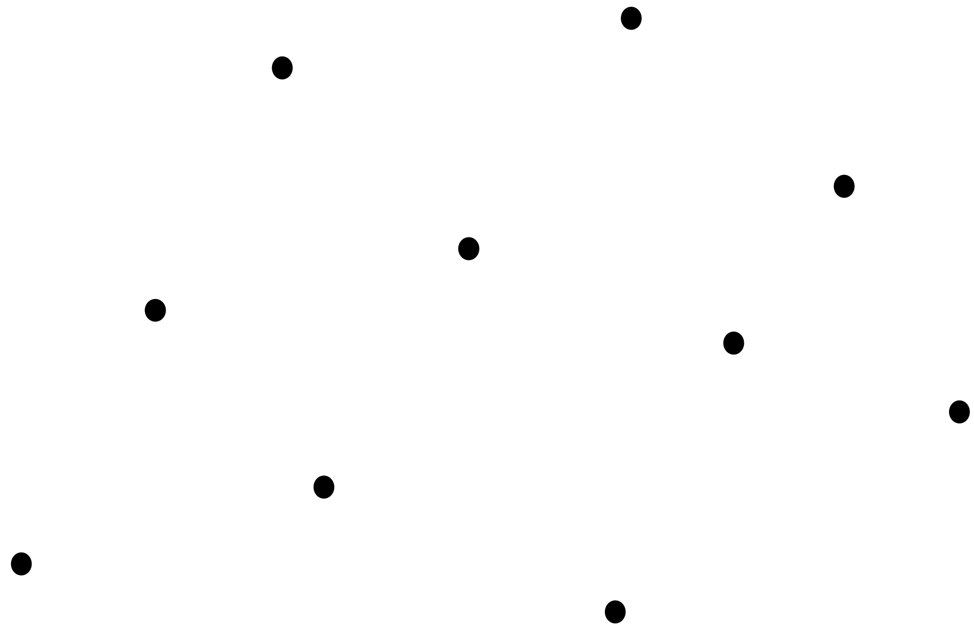
間違った例

練習

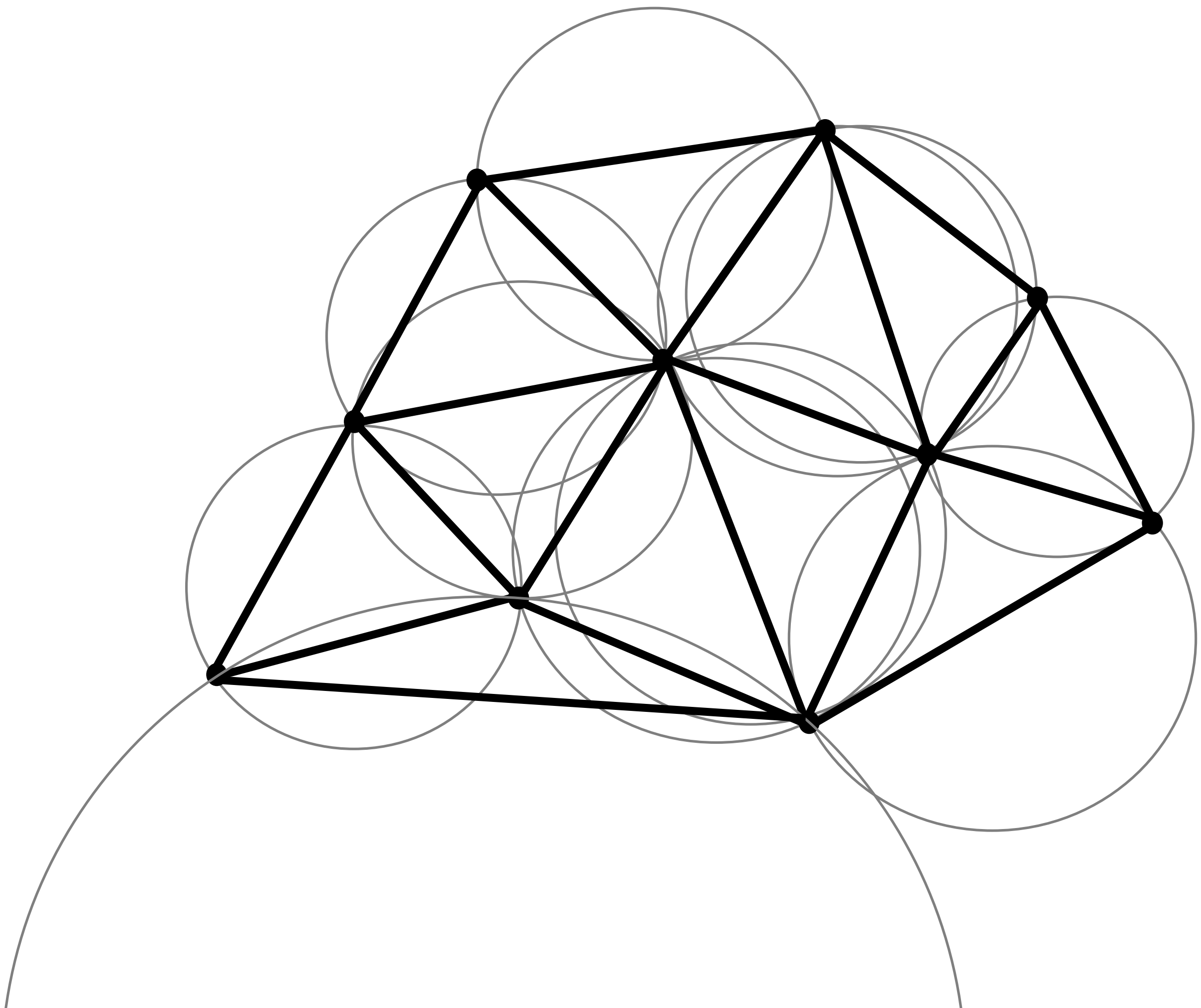
以下の母点に対して、

(1) ドロネー図を作成してみよ

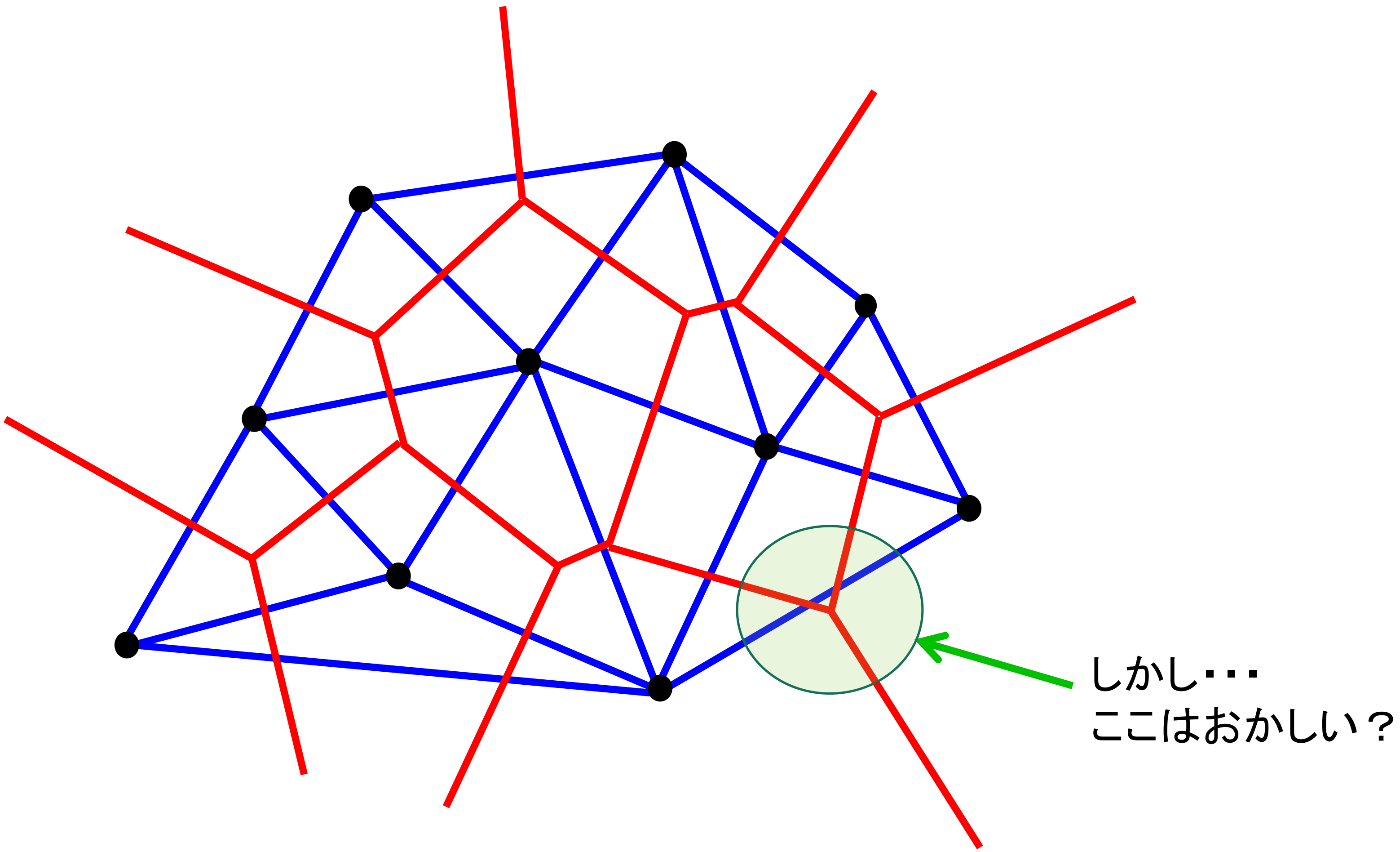
(2) ドロネー図の上にボロノイ図を作成してみよ



解:ドロネー図



解：ドロネー図＆ボロノイ図



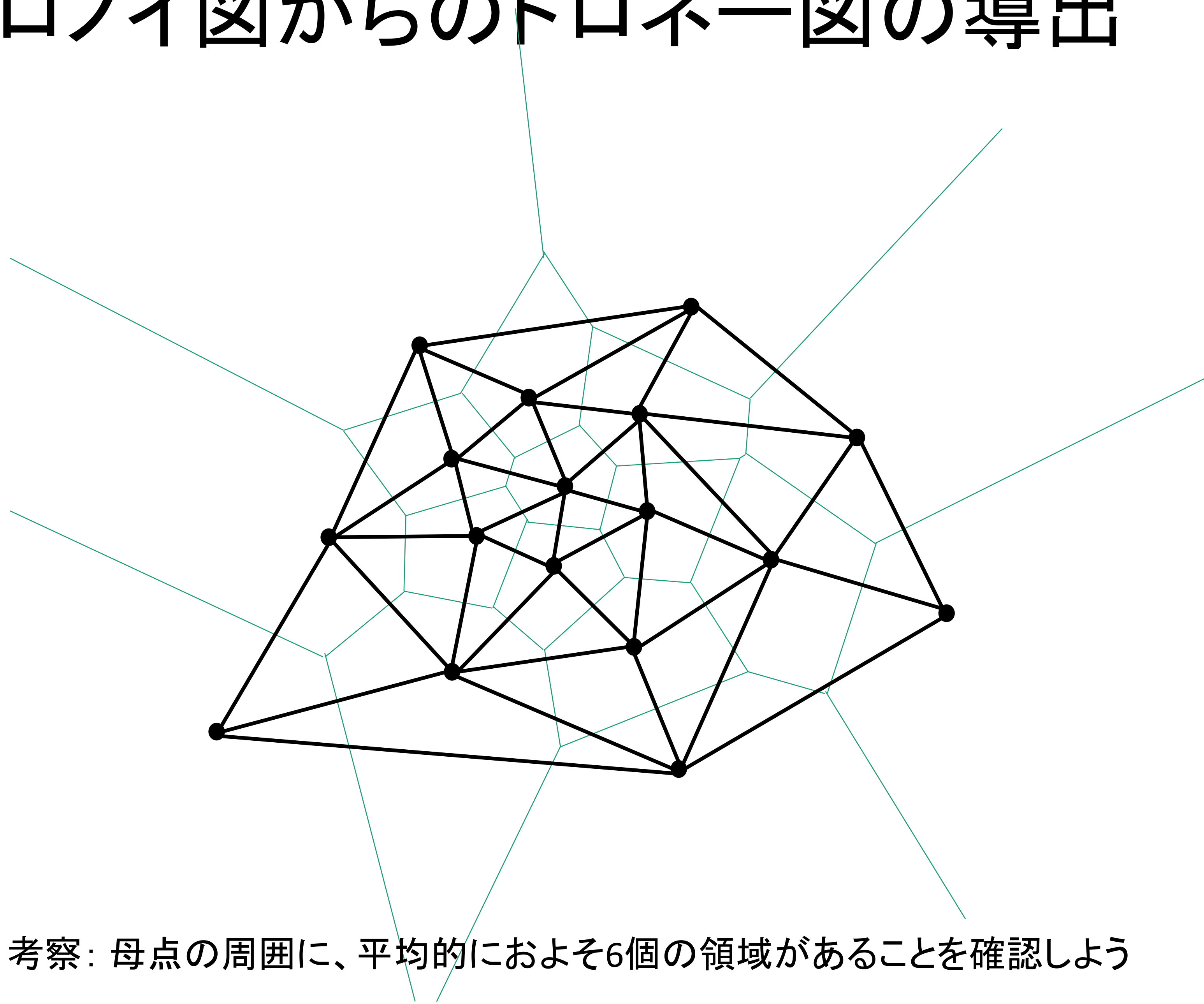
Question: ドロネー図とボロノイ図は、双対関係にあるのか？？？

ドロネー図の特徴･性質

- ドロネー図は、ボロノイ図の双対グラフの平面表現である
  - ボロノイ図の点 ⇔ ドロネー図の面
  - ボロノイ図の辺 ⇔ ドロネー図の辺 (直交)
  - ボロノイ図の面 ⇔ ドロネー図の点

  (*) ドロネー図とボロノイ図が、直接的に双対グラフであるわけではない
- ボロノイ図の隣接領域の母点間を結ぶとドロネー図ができる
- ドロネー分割時の三角形の外接円の中心がボロノイ点になっている
- ドロネー図の母点の周囲には平均しておおよそ6個の領域がある

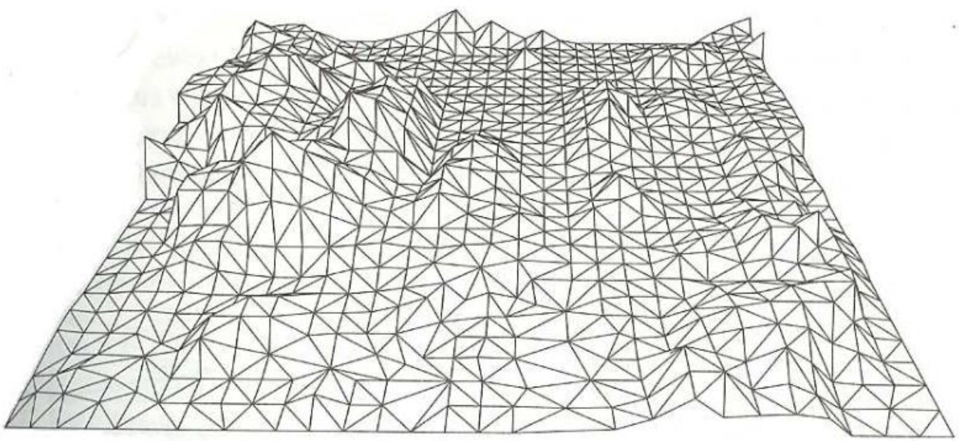
ボロノイ図からのドロネー図の導出



考察: 母点の周囲に、平均的におよそ6個の領域があることを確認しよう

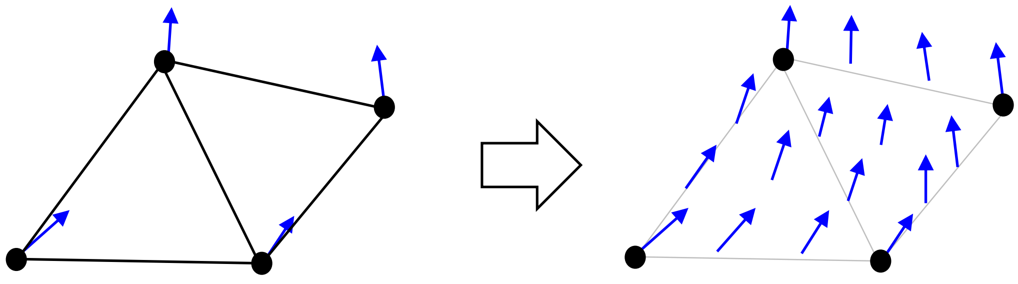
ドロネー図の応用

- 局面 z=f(x,y) の三角形近似



引用: http://www.kanenko.com/~kanenko/KOUGI/CompGeo/cpgeoc.pdf

- 離散データの補完 (例: 潮流)



今日の内容

- 平面的グラフ、平面グラフ、彩色、四色定理
- ボロノイ図
- ドロネー図