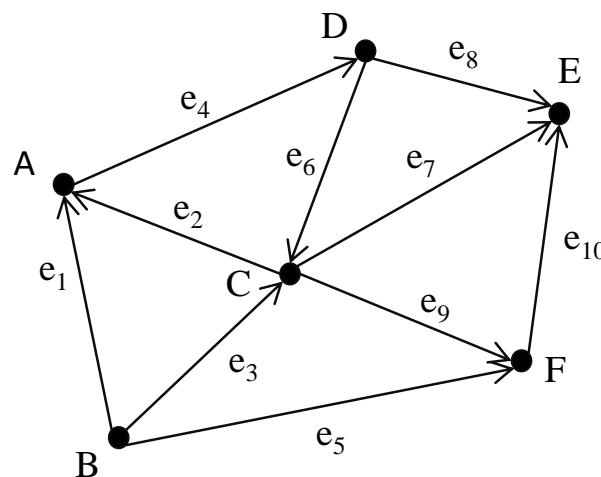
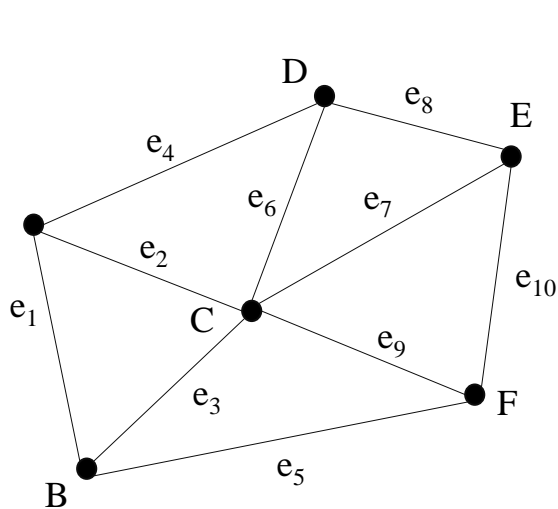


グラフの構造と種類



落合 秀也

グラフとは

- 頂点と頂点間をつなぐ線によって、物事を抽象的に捉えたもの



東京メトロ路線図の例

グラフによる実世界のモデル化

- 交通網
 - 頂点：都市や駅
 - 辺：道路や路線
- コンピュータ・ネットワーク
 - 頂点：端末やスイッチ
 - 辺：ケーブル
- WWW
 - 頂点：ページ
 - 辺：リンク
- デジタル回路
 - 頂点：論理素子
 - 辺：配線
- 分子構造
 - 頂点：原子
 - 辺：結合
- 依存関係
 - 頂点：事象
 - 辺：原因、結果の関係
- Social Network
 - 頂点：人間,
 - 辺：関係(知人, etc.)

無線ネットワーク実験の紹介



51台の無線LAN端末
を使った実験

互いに距離が近けれ
ば無線LANでつながる

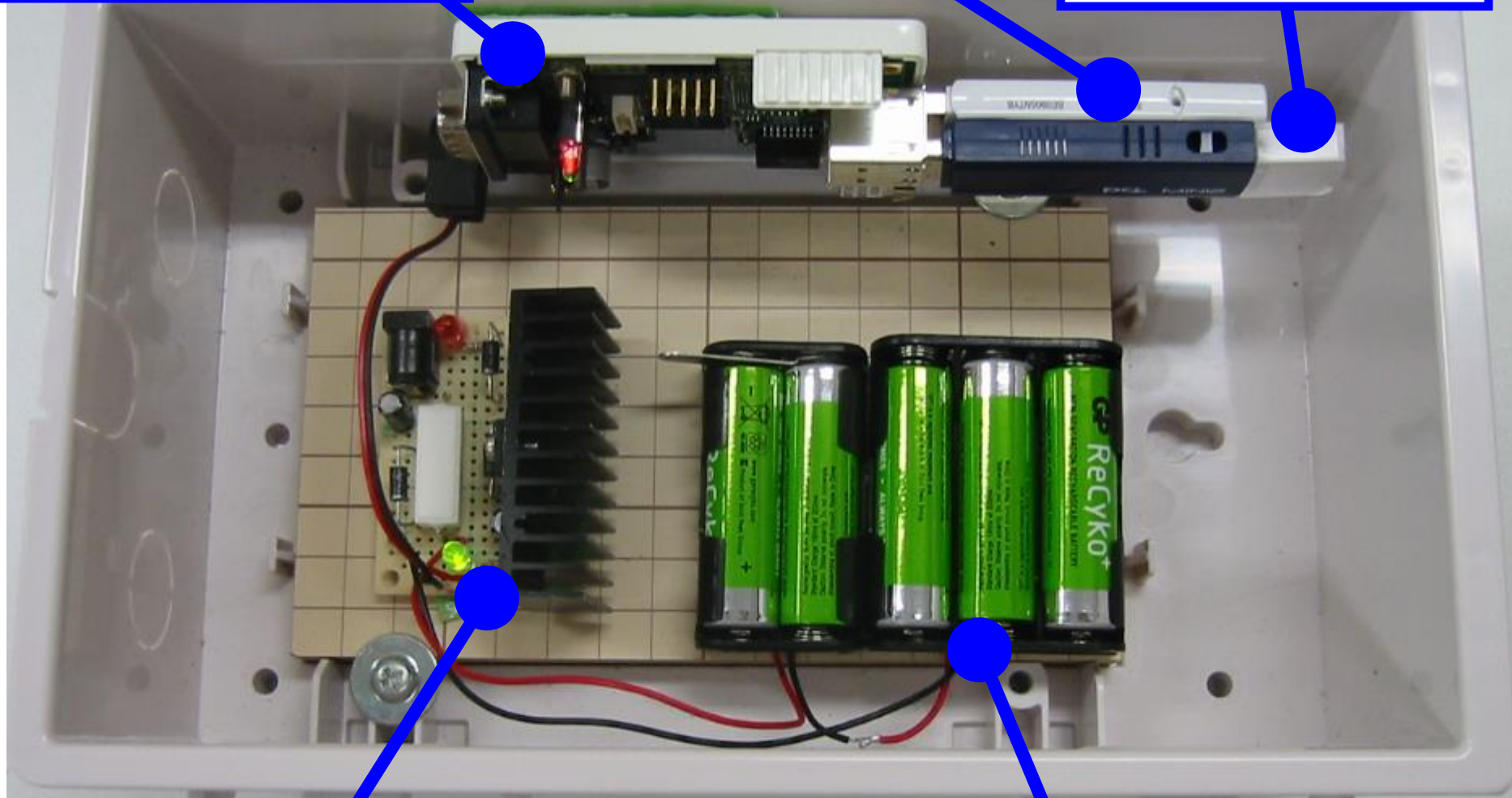
広範囲に展開したとき
に、どのようにつなが
る(ネットワークが構
成される)のか？

無線ネットワーク実験装置の概要

Linux Computer

Storage(2GByte)

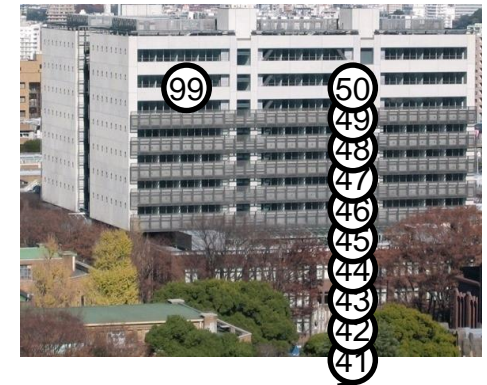
802.11b/g/n



Power Circuit

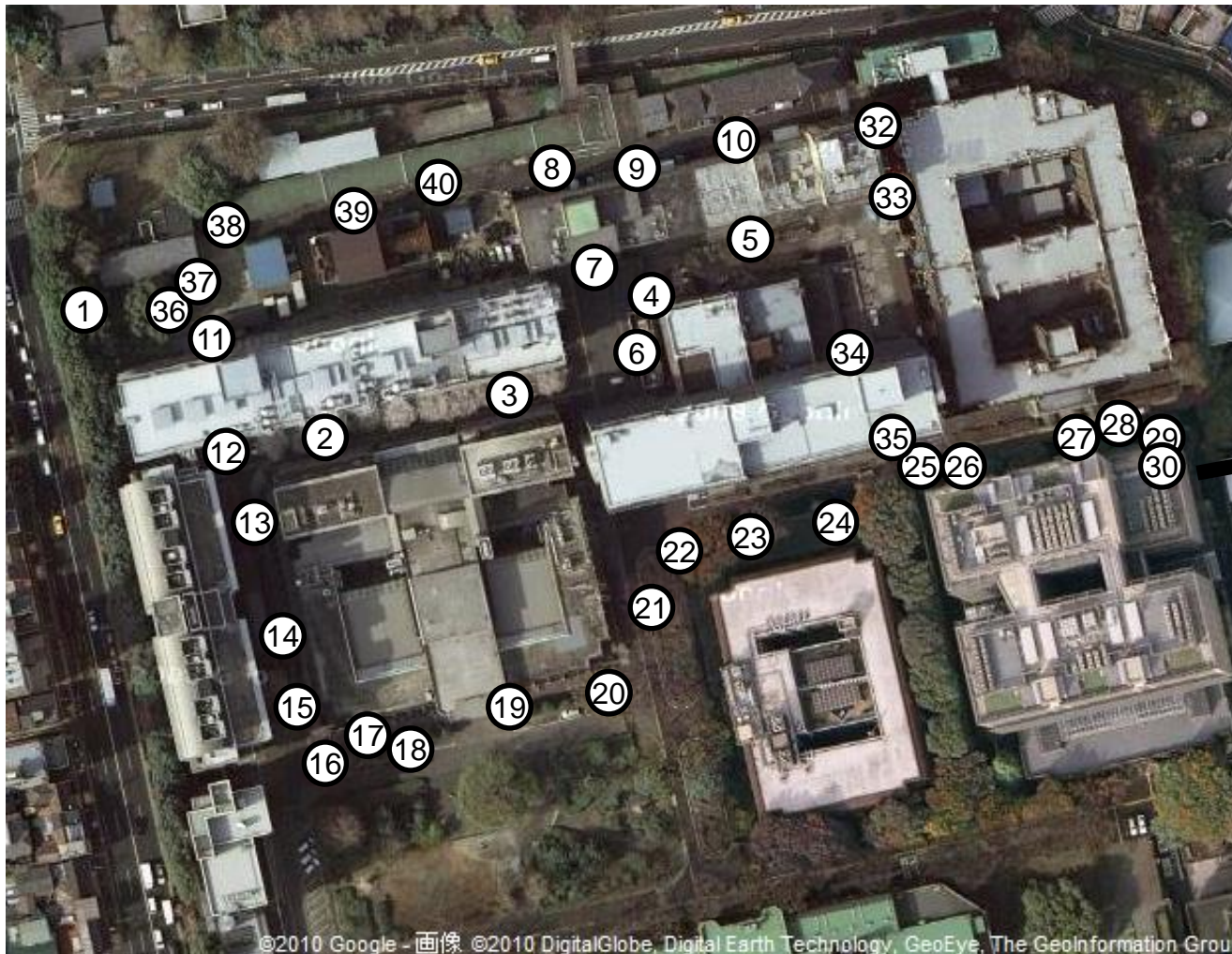
Battery(6.0V 2100mAh or 10Ah)

無線LANの接続性を調査した実験



工学部2号館

指定された地点に
無線端末を設置し、
無線LANでの接続
関係を記録する



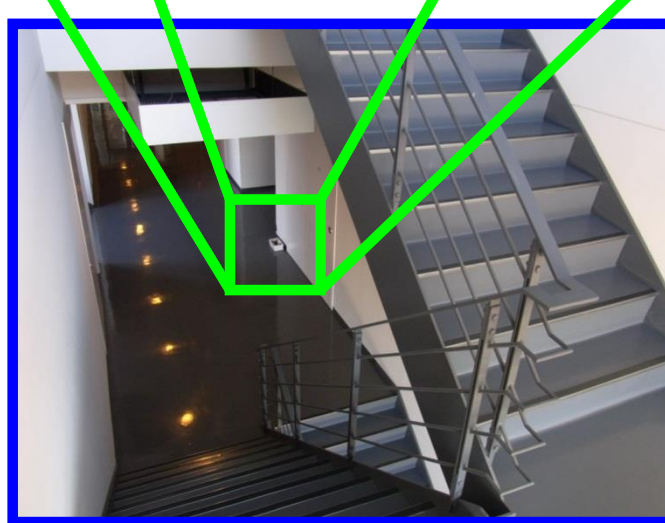
©2010 Google - 画像 ©2010 DigitalGlobe, Digital Earth Technology, GeoEye, The GeoInformation Group

50m

東大、本郷キャンパス (工学部エリア)

Deployment Pattern

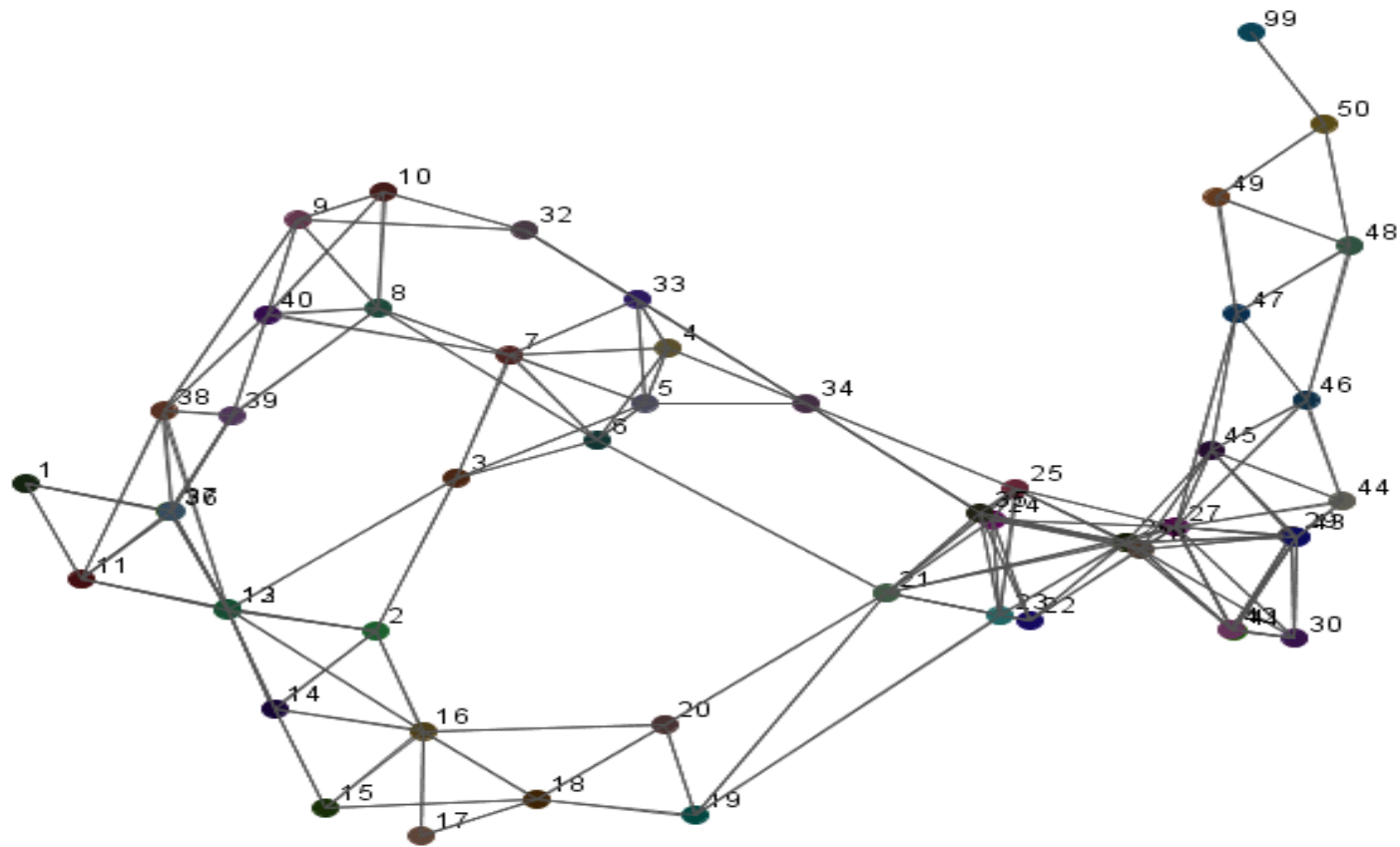
無線端末 設置の様子



屋外

ビル内部

無線LANの接続関係のグラフ化



Meshネットワークの不安定さ.mpg
Demonstration Video

今日のテーマ： グラフの構造・種類を知る

- グラフとは
- 次数とは、道とは、連結とは、閉路とは
- 距離とは、直径とは
- 木とは、全域木とは
- ラベル付グラフ
- 有向グラフ、DAG

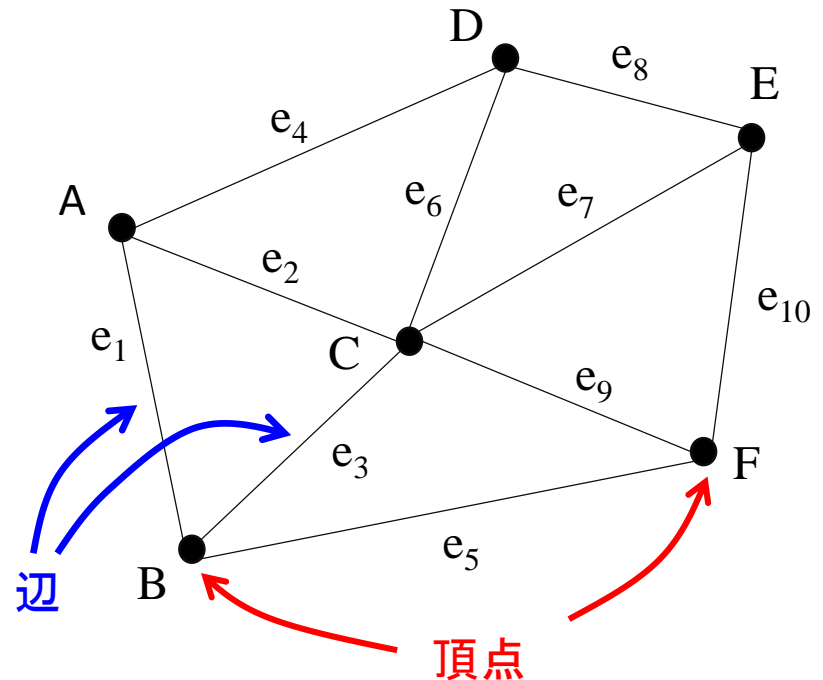
グラフ(Graph)を数学的に捉える

- グラフGは、二つの集合で構成されている

- 頂点(vertex)の集合V
 - 点(point)、節点(node)とも言う
- 辺(edge)の集合E

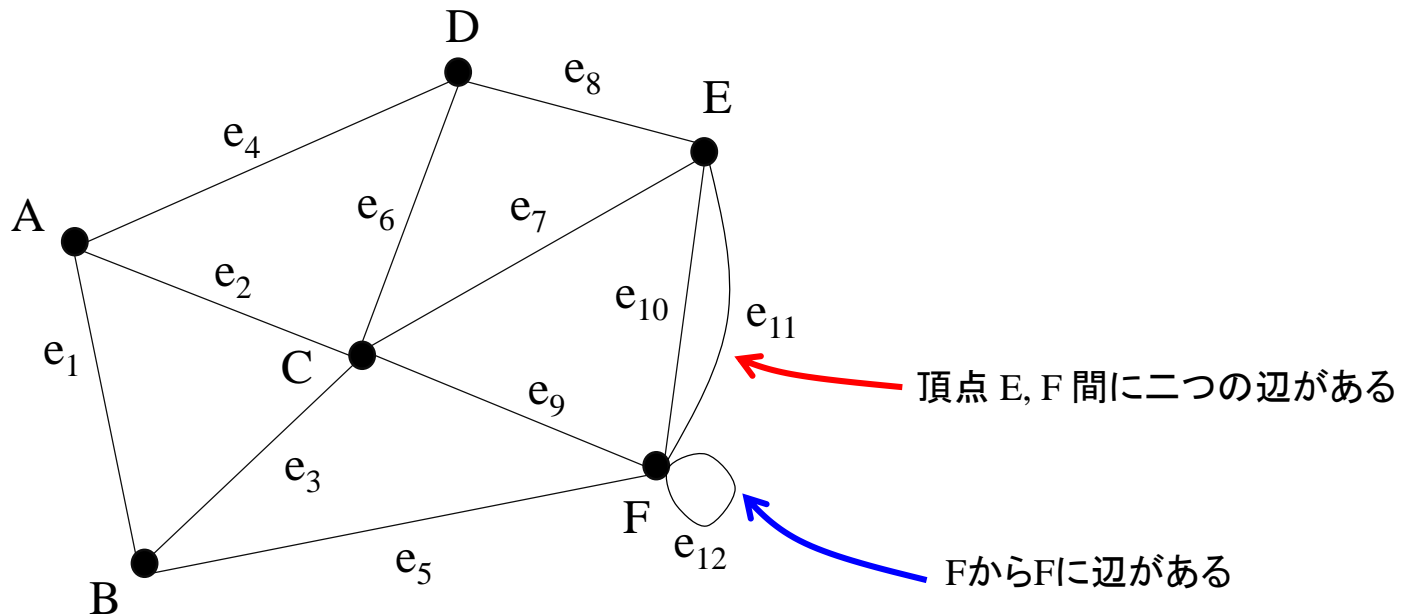
- $G(V, E)$ と書く

- $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$
- $e_1 = \{A, B\}, e_2 = \{A, C\}, \dots$



単純グラフ、多重グラフ

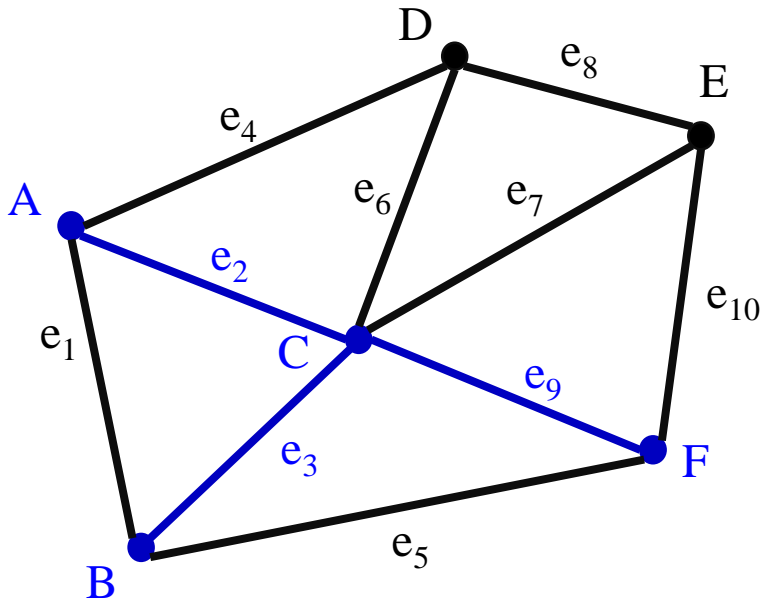
- 多重グラフ (multigraph)
 - 多重辺があるもの
 - 同一の頂点間で辺(ループ)を作っているもの



- 広義には、多重グラフを、一般にグラフと呼び、多重辺やループのないグラフを、単純グラフ (simple graph) と呼ぶこともある。

部分グラフ (subgraph)

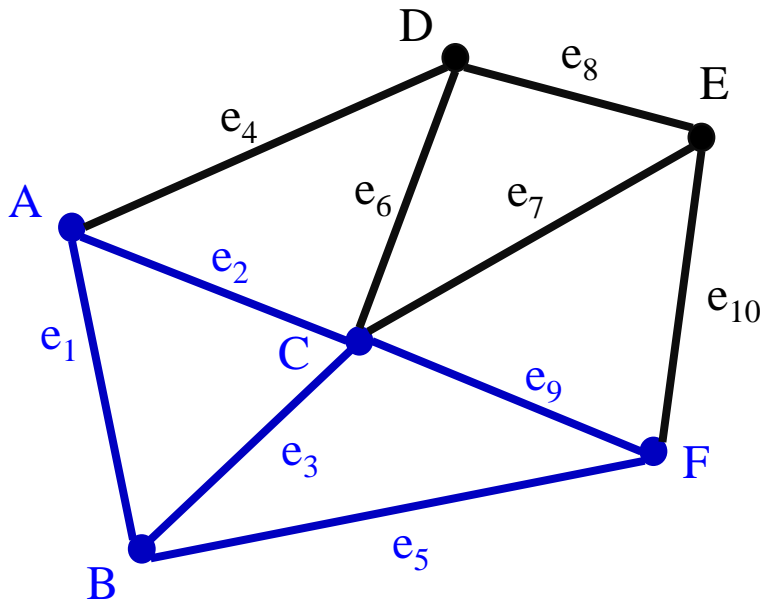
- グラフ $G(V, E)$ に対し、 $V' \subset V$ 、 $E' \subset E$ であり、かつ E' の各要素の両端点が、 V' に含まれるとき、 V' 、 E' で作られるグラフ $G'(V', E')$ を部分グラフと呼ぶ



例:
 $V' = \{A, B, C, F\}$
 $E' = \{e_2, e_3, e_9\}$
とすると、 $G'(V', E)$ は
 $G(V, E)$ の部分グラフ

生成されたグラフ

- G' が G の部分グラフで、 V' が両端点となる G におけるすべての辺、を E' が含む場合、 $G'(V', E')$ は、 V' によって生成されたグラフである、という。



例:

$$V' = \{A, B, C, F\}$$

$$E' = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_9\}$$

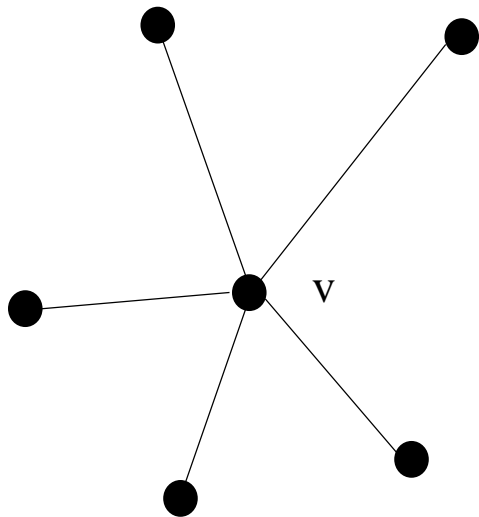
とすると、 $G'(V', E)$ は
 $G(V, E)$ から V' によって、
生成されたグラフである

次数 (degree)

- 頂点 v に接続する辺の数を、頂点 v の次数と呼ぶ。

$\text{deg}(v)$

で表す



左図の例:
 $\text{deg}(v)=5$

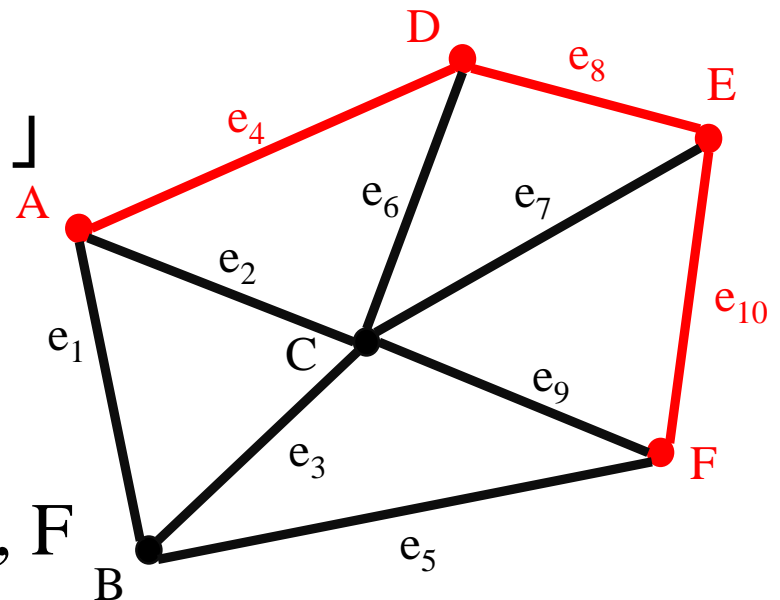
道 (path)

- 頂点-辺-頂点-辺-頂点-...-頂点 (ただし、同じ頂点を通らないもの) を、道(パス: path)と呼ぶ
- モデル上の道を考察する上で重要な概念

- 道は
「辺の列」または「頂点の列」
で表現可能

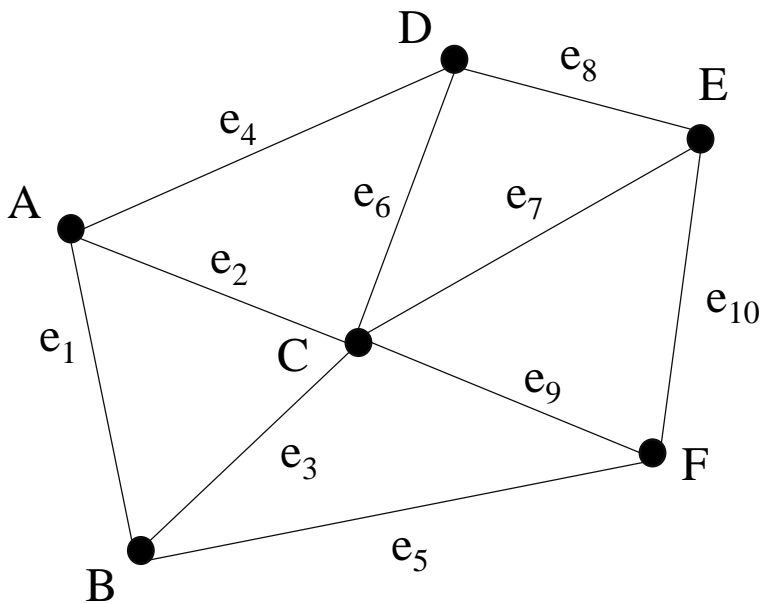
(例) 右図の場合:

e_4, e_8, e_{10} または A, D, E, F

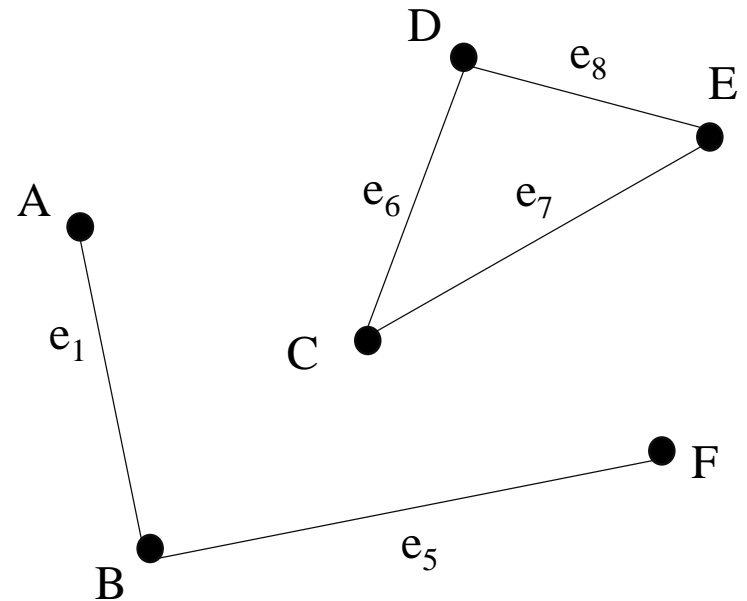


連結 (connectivity)

- グラフ G において、任意の2頂点間に道が存在すれば、グラフ G は連結である、という。



連結なグラフ



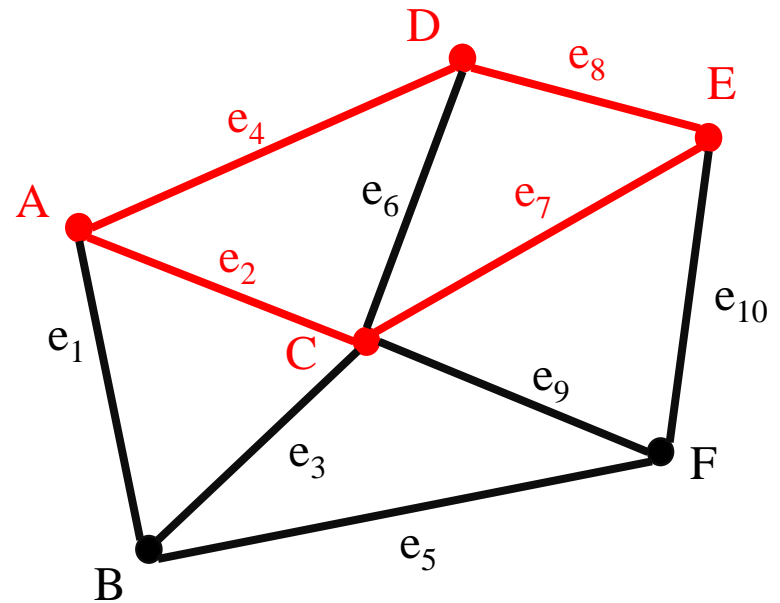
連結でないグラフ

k-閉路 (k-cycle)

- 頂点-辺-頂点-辺-頂点-...-頂点 (ただし、最初と最後が同じ頂点である以外、同じ頂点を通らないもの) を、閉路と呼ぶ

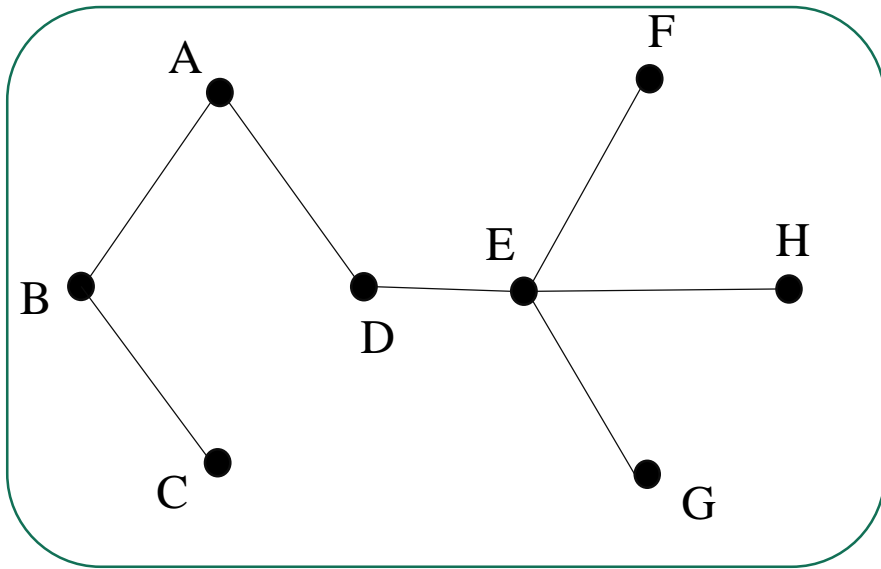
- 閉路の辺の数に着目し、
k-閉路 (k個の辺がある)
と呼ぶことがある。
(*) なお、kは3以上

(例) 右図の場合は、
k=4の閉路である



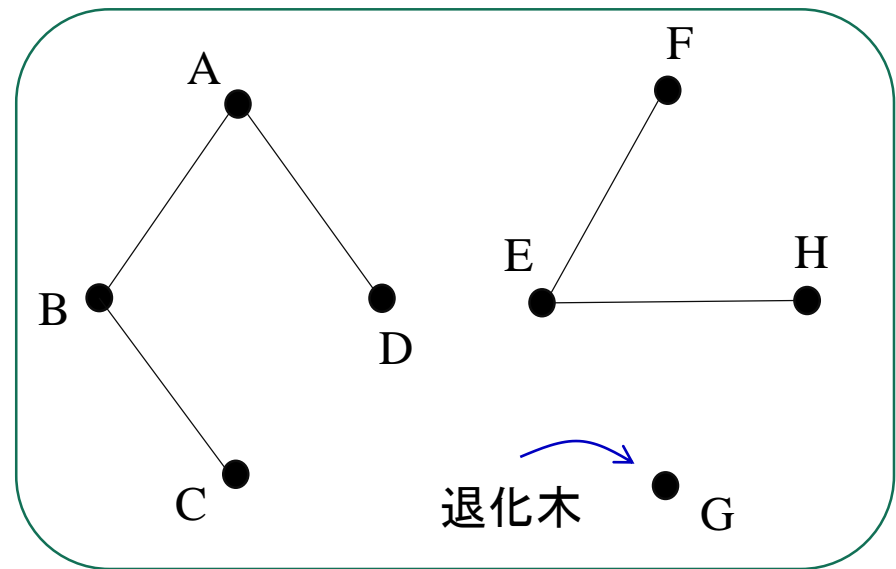
無閉路(acyclic, cycle-free)グラフ

- 閉路のないグラフ



連結グラフ

木 (tree)

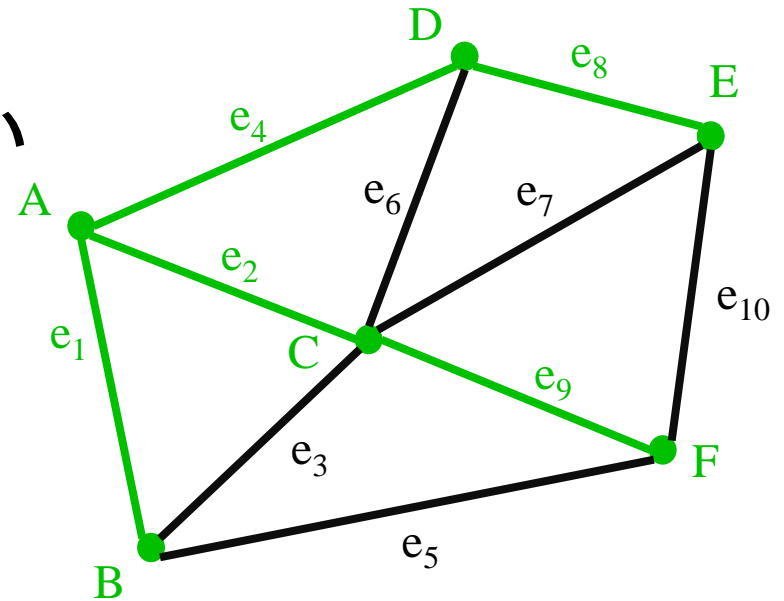


連結でないグラフ

森 (forest)

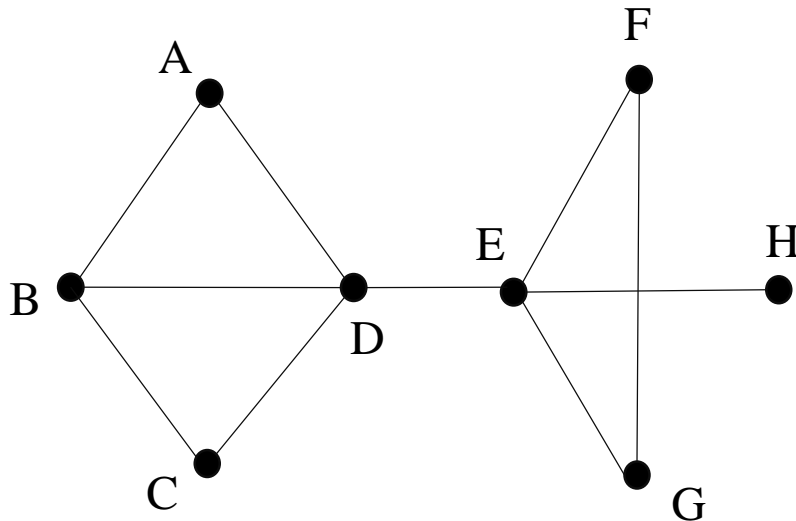
全域木 (spanning tree)

- グラフGのすべての頂点で構成される木
 - 無閉路
 - 連結である
 - すべての頂点に到達可能
- 全域木の作り方は一つではない
 - 何通りかある
 - 最小全域木の作り方は後日紹介



距離(distance)、直径(diameter)

- 2頂点間の距離: $d(u,v)$
 - 頂点 u 、頂点 v 間の最短道の辺の数のこと



右図の場合:

$$d(A,C)=2$$

$$d(B,H)=3$$

直径は 3

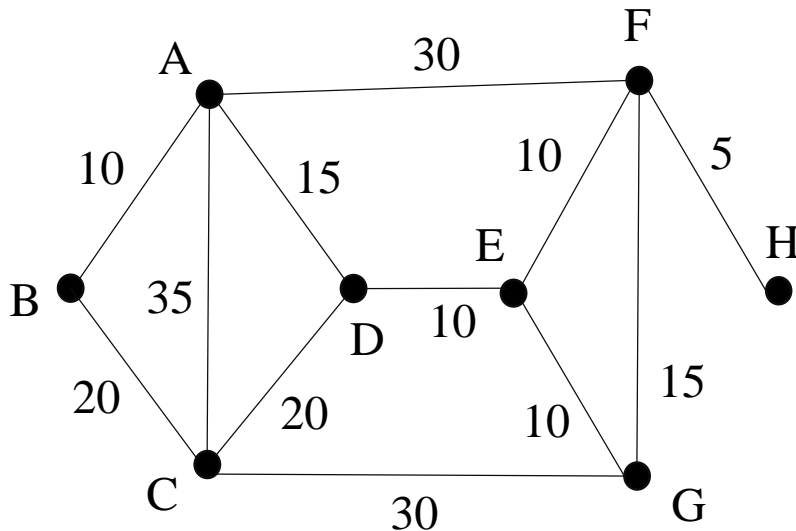
- グラフ G の直径
 - G 上の任意の頂点 u 、頂点 v 間の距離の最大値のこと

ラベル付グラフ (labeled graph)

- 頂点または辺に、ラベル (or データ) が与えられているグラフ

(例)

- 頂点: インターネット・ルータの名前
- 辺: 回線の通信帯域 (Mbps)



ラベル付グラフの代表的問題

- 最短経路問題
- 最大流量問題

有向グラフ

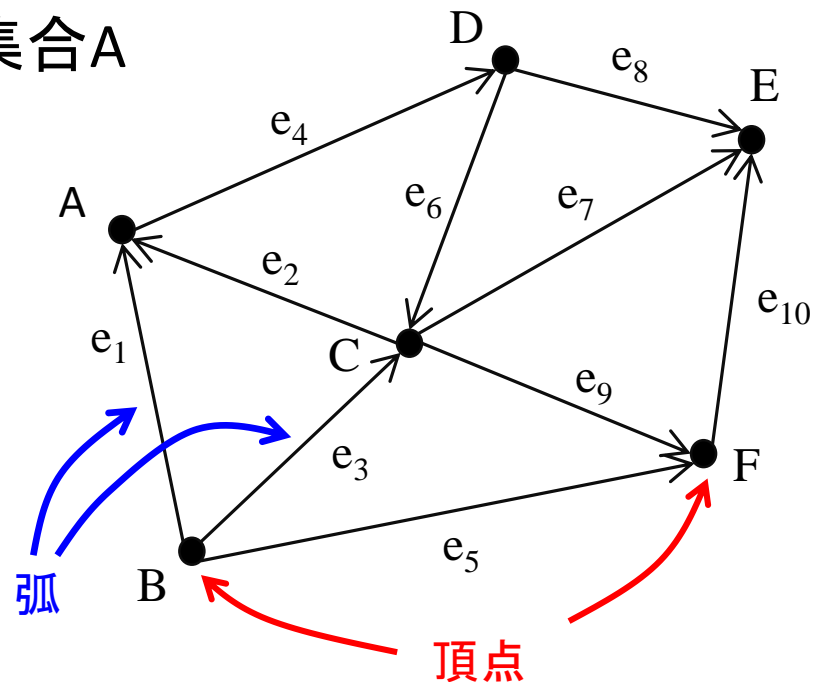
(directed graph, digraph)

- 有向グラフDは、二つの集合で構成されている

- 頂点(vertex)の集合V
 - 点(point)、節点(node)とも言う
- 弧(arc): 頂点の順序対の集合A

- $D(V, A)$ と書く

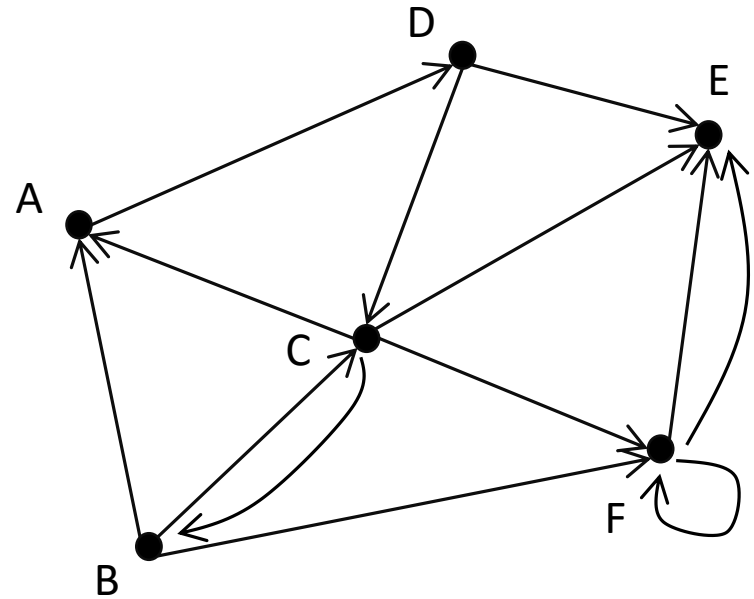
- $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $A = \{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$
- $e_1 = \langle B, A \rangle, e_2 = \langle C, A \rangle, \dots$



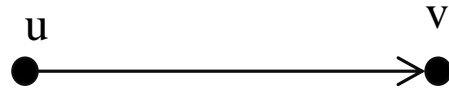
向きの無いグラフを、無向グラフと呼ぶこともある

次のものも有向グラフ

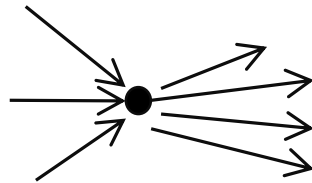
- 多重弧のあるもの
 - 同一頂点間の弧(ループ)があるもの
- つまり、多重グラフの辺に向きがついたもの



有向グラフの諸々 (1/2)

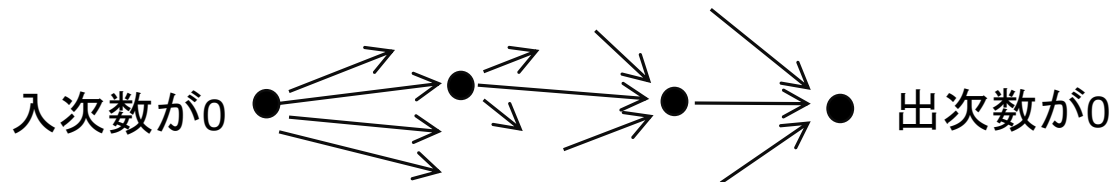


uで始まり(begin) vで終わる(end)



右図の例では
入次数: 3
出次数: 4

入次数(indegree) 出次数(outdegree)

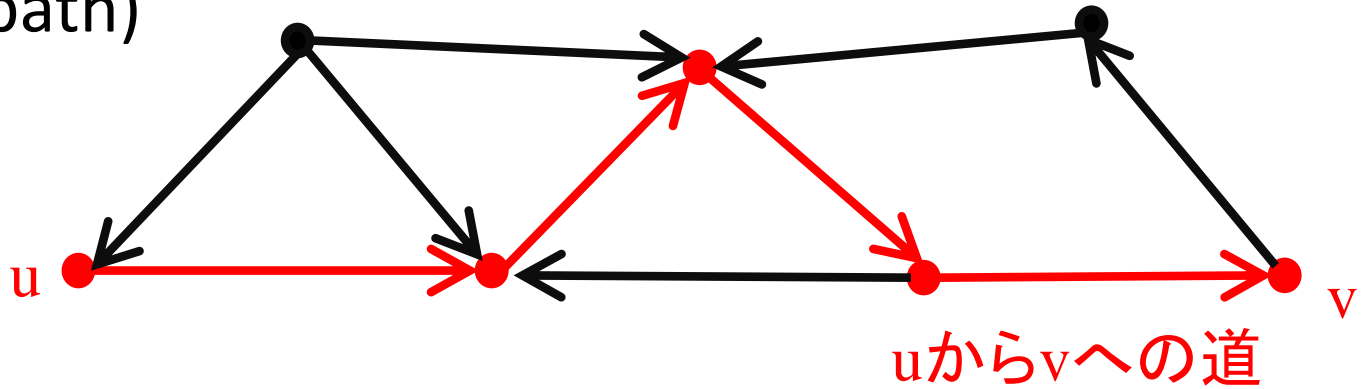


入口(source)

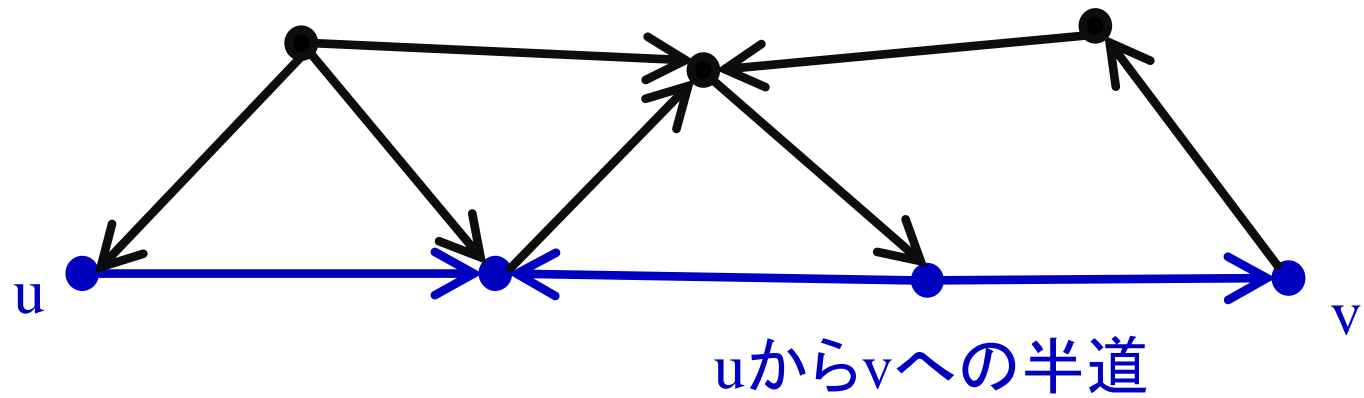
出口(sink)

有向グラフの諸々 (2/2)

- 道(path)



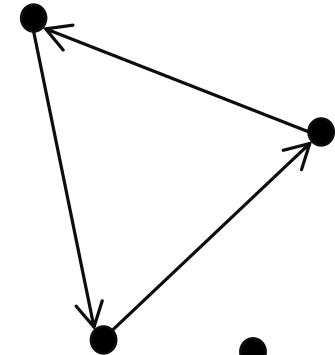
- 半道(semipath)



有向グラフの3種類の連結性

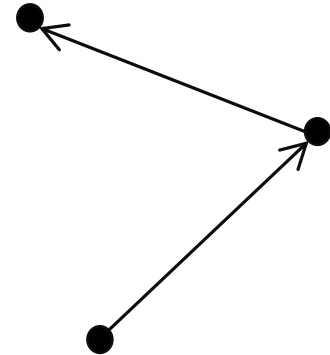
- 強連結

- 任意の頂点 u, v 間を行き来できる
- 任意の頂点 u, v 間で双方向に道がある



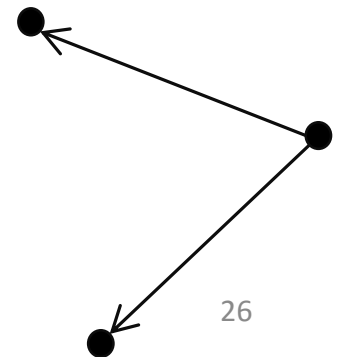
- 片方向連結

- 任意の頂点 u, v 間で、少なくとも片方向は行ける
- 任意の頂点 u, v 間で道がある



- 弱連結

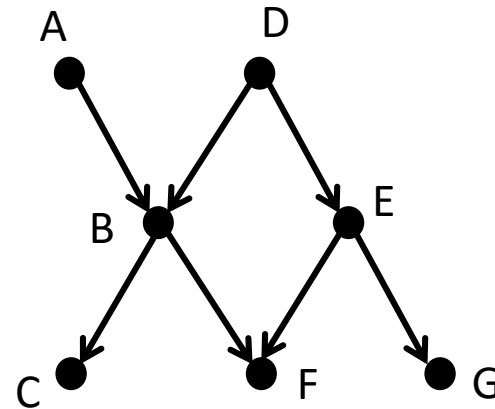
- 任意の頂点 u, v 間が、弧ではつながっている
- 任意の頂点 u, v 間で半道がある



有向非巡回グラフ

Directed Acyclic Graph (DAG)

- 閉路の無い有向グラフ
- 半順序性を持つ



- トポロジカルソートにより、頂点を一列に並べることができる(全順序に対応付けできる)
 - 上図の場合: A, D, B, E, C, F, G など
 - ジョブのスケジューリング等で使われる

今日のテーマ： グラフの構造・種類を知る

- グラフとは
- 次数とは、道とは、連結とは、閉路とは
- 距離とは、直径とは
- 木とは、全域木とは
- ラベル付グラフ
- 有向グラフ、DAG

今後の予定

- 5月27日：探索アルゴリズム
 - 深さ優先探索、幅優先探索
 - パトリシア木
- 6月3日：最短経路問題
 - ベルマンフォード法、ダイキストラ法
- 6月10日：休講