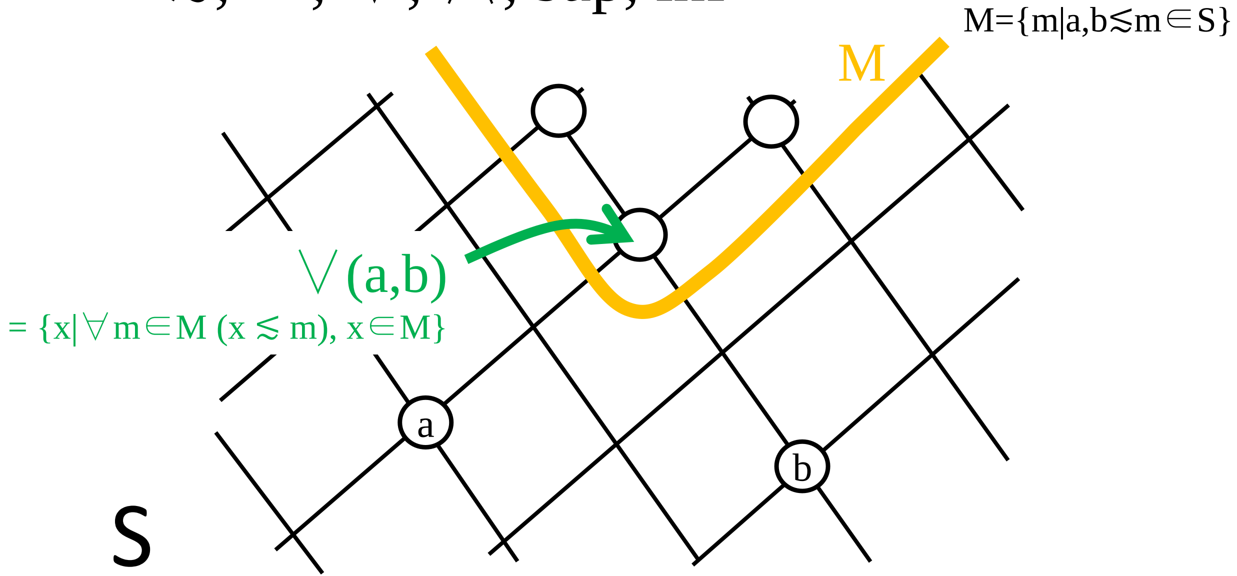
離散数学

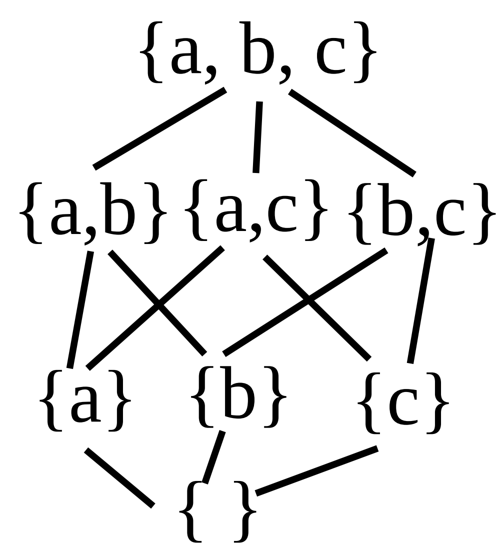
命題計算

落合 秀也

前回の復習: 順序集合と束

- キーワード
  - 半順序, 直前, 直後, 図式, ハッセ図, 比較可能, 全順序束, 結び(Join), 交わり(Meet), 上限, 下限, 半束
- 記号
  - $\lesssim$, $\ll$, $\vee$, $\wedge$, sup, inf





今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

文 (Statement)

“2016年5月6日の東京の最高気温は25℃を超える”
のような言葉による主張(Verbal Assertion)を、

文(Statement)

と呼ぶ。

- 文を、p, q, r などの記号を用いて表現する。
  p：2016年5月6日の東京の最高気温は25℃を超える
- 真(true)または偽(false)の値を取る
  - どちらでもないものは除く
  - 真偽は、真理値(truth value)と呼ぶ

複合文 (Compound Statement)

“2016年5月6日の東京は晴れ、最高気温は25℃を超える”

は、2つの副文(Substatements) :

- p: 2016年5月6日の東京は晴れる
- q: 2016年5月6日の東京の最高気温は25℃を超える

の

- 連言 (かつ)

として、構成されている

- いくつかの文は複合的 (Composite)である
  - 副文と様々な結合子から構成される。
- 複合文の真理値は、副文の真理値と結合子によって完全に決められる

結合子1：連言 $p \wedge q$

- $p \wedge q$ は、文pと文qを“かつ”という言葉で結びつけたもの。
- 元の文の連言(Conjunction)と呼ぶ複合文

- 真理表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

結合子2: 選言 $p \vee q$

- $p \vee q$ は、文pと文qを“または”という言葉で結びつけたもの。
- 元の文の選言(Disjunction)と呼ぶ複合文

- 真理表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

結合子3：否定 $\neg p$

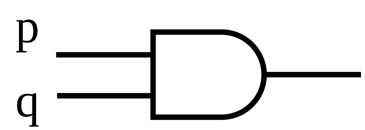
- $\neg p$ は、文 p に “ではない”という言葉を結びつけたもの。
- 元の文の否定(Negation)と呼ぶ複合文

- 真理表

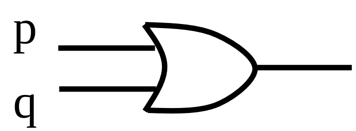
p	$\neg p$
T	F
F	T

様々な 連言･選言･否定 の表記

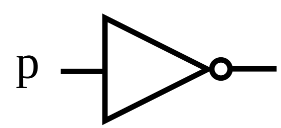
- 連言
  - p∧q　　p & q　　p･q　　pq
  - p&&q　　p AND q

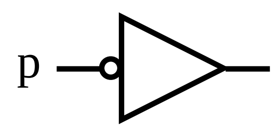


- 選言
  - p∨q　　p + q
  - p || q　　p OR q



- 否定
  - ¬p　　∼p　　$\overline{\mathrm{p}}$　　p’
  - !p　　NOT p





今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

命題 (Proposition)

- 複合文 P (p, q, r, …) の副文p, q, r, … が変数であるとき、Pは命題と呼ばれる
- Pの真理値は、変数の真理値が決まると、決まる
- その真理表は、下記の例のように与えられる

p	q	$\neg(\neg p \wedge q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

普通、P(p,q)が与えられたとして、その真理表を自明に導くことは困難

＊計算の方法がある

命題の計算方法

p	q	¬	(¬	p	∧	q)
T	T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F
ステップ		4	2	1	3	1

練習: “セレクタ”の真理表

- 命題 $Y(s, p, q) = (p \wedge s) \vee (q \wedge \neg s)$ に対する真理表を作成せよ
- 解:

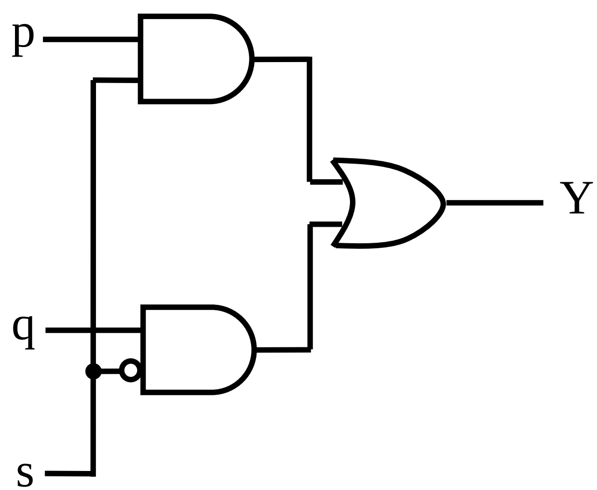
s	p	q	$(p \wedge s) \vee (q \wedge \neg s)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

計算方法

s	p	q	(p	$\wedge$	s)	$\vee$	(q	$\wedge$	$\neg$	s)
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	F
ステップ			1	3	1	4	1	3	2	1

考察: セレクタの論理回路

$$Y=(p\wedge s)\vee(q\wedge\neg s)$$



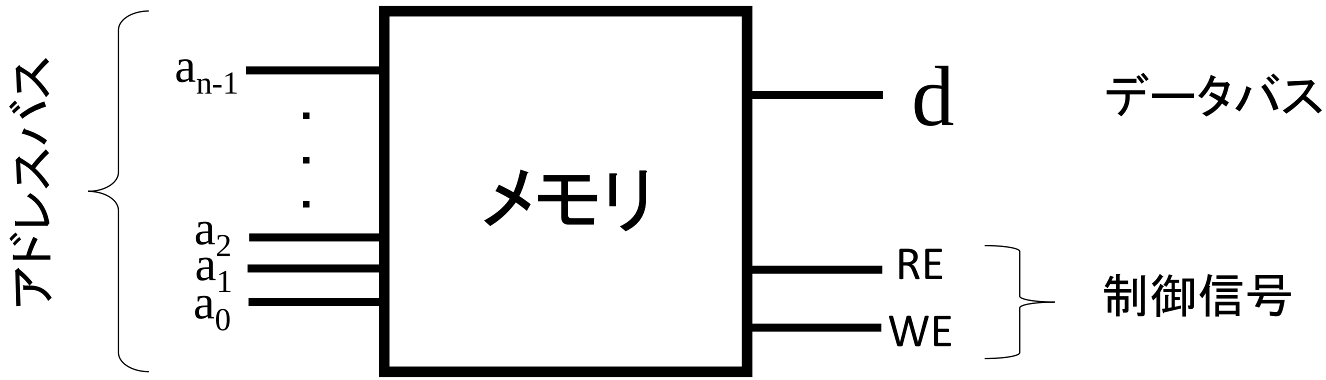
s	p	q	$(p\wedge s)\vee(q\wedge\neg s)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

s=T のときは Yに p を出力
s=F のときは Yに q を出力

sの真偽でpかqかを選択できるので
セレクタと呼ばれる

メモリは プログラマブルな命題？

- n ビットのアドレス空間を持つメモリを考え、a_0〜a_{n-1}までのアドレスに対応するデータ(真偽を表す1ビット)をdとする。



- $P(a_0, \ldots, a_{n-1})$という関数を考え、この値を$d(a_0, \ldots, a_{n-1})$の読出し結果とすれば、Pは$a_0, \ldots, a_{n-1}$を副文とする命題である。
- メモリであるから、$d(a_0, \ldots, a_{n-1})$ に値を書き込むことができる。そうすると、Pは自由にプログラム可能である。

今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

恒真命題 (Tautology)
矛盾命題 (Contradiction)

- 恒真命題
  - 命題P(p, q, …) の真理が、任意のp, q, … に対して真である
  - 例: $p \lor \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
T	F	T
F	T	T

- 矛盾命題
  - 命題P(p, q, …) の真理が、任意のp, q, … に対して偽である
  - 例: $p \land \neg p$

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
T	F	F
F	T	F

今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

論理同値(Logically Equivalent)

- 二つの命題 P(p, q, …) と Q(p, q, …)が、同一の真理表を持つとき、これらは論理同値であるといい、

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

  と書く

- 二つ以上の命題が論理同値であるかどうかは、真理表を作成して、完全に一致することを確かめれば良い。

練習: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ を示せ

- 方針: それぞれの真理表を作成し、それが完全に一致することを示す
- 解:

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
ステップ		3	1	2	1

一致

p	q	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q
T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F
ステップ		2	1	3	2	1

命題代数の法則 (1/2)

- べき等律

  $p \vee p \equiv p$ $\qquad$ $p \wedge p \equiv p$

- 結合律

  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

- 交換律

  $p \vee q \equiv q \vee p$ $\qquad$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

- 分配律

  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\qquad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

命題代数の法則 (2/2)

- 同一律

  $p \lor F \equiv p$　　　　$p \land T \equiv p$

  $p \lor T \equiv T$　　　　$p \land F \equiv F$

- 捕元率

  $p \lor \neg p \equiv T$　　　　$p \land \neg p \equiv F$

  $\neg T \equiv F$　　　　$\neg F \equiv T$

- 対合律

  $\neg\neg p \equiv p$

- ド・モルガンの法則

  $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$　　　　$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

条件文 (Conditional Statement) 重条件文 (Biconditional Statement)

- 条件文
  - “p ならば q” の文
  - $p \rightarrow q$ と書く
  - $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- 重条件文
  - “pはqの必要十分条件である”の文
  - $p \leftrightarrow q$ と書く
  - $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

論法 (Argument)

- 前提(Premises) $P_1, \ldots, P_n$ から結論(Conclusion) Qを生み出す主張（文）のことを、論法といい、

$$P_1, \ldots, P_n \vdash Q$$

と書く。⊢ はト記号と言う。

- 論法も文であり、真理値を持つ：
  - 真：すべての前提 $P_1, \ldots, P_n$ が真のとき、Qが真になる
  - 偽：その他の場合

- 論法が真ならば、妥当(valid)な論法と呼ぶ
- 論法が偽ならば、誤り(fallacy)と呼ぶ

定理

- 論法 $P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ が妥当である必要十分条件は、命題 $(P_1 \wedge, \ldots, \wedge P_n) \rightarrow Q$ が恒真命題のとき、である。

- つまり、論法の妥当性は、上記、命題の恒真性を確かめることで、判別できる。

練習

- 次の論法(三段論法)が妥当であることを確かめよ

$$p \to q,\ q \to r \vdash p \to r$$

- 方針:

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

が恒真命題であることを示せばよい

計算方法

p	q	r	[(p	→	q)	∧	(q	→	r)]	→	(p	→	r)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
ステップ			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

考察: 仕様 からの プログラム作成

いま、ある仕様Aをプログラム**P**へと実装する場合、

$$\text{仕様A} \vdash \text{プログラムP}$$

的な、論法<u>に似た活動</u>が行われる。

(*) 正確には ⊢ よりは ⊨ を使うべきかもしれない。

- この論法<u>に似た活動</u>が妥当であれば、
  - プログラムPは、仕様Aに正しく沿ったプログラムである。
  - 仕様A→プログラムP が恒真である
  - どの検査項目に対しても、テスト結果は、OKになる

  (*) 万一、ある検査項目にNGが含まれていれば、その論法<u>に似た活動</u>には誤りがあることになる。このことを、ソフトウェア界では、バグがある、という。

今日のテーマ: 命題計算

- 文、複合文、結合子
- 命題
- 恒真命題、矛盾命題
- 論理同値
- 命題代数の法則
- 条件文、重条件文
- 論法
- 論理含意

論理含意

- 命題 $P(p, q, \ldots)$ が真のとき、命題 $Q(p, q, \ldots)$ が真になるのであれば、PがQを論理的に含む (logically imply) と言い、

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$$

と書く。

- このとき、$P \vdash Q$は妥当であり、$P \rightarrow Q$は恒真命題である。
- 例: $p \wedge q$ は、$p \rightarrow q$ を論理的に含む

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

「含む」

と

「ならば」

は異なることに注意せよ

練習: $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \to q$ を示せ

- 解:
  - $p \leftrightarrow q$, $p \to q$ の真理表は、以下の通りであり、$p \leftrightarrow q$ が真のときは $p \to q$ は真となっている。よって、$p \leftrightarrow q \Rightarrow p \to q$である。

p	q	p↔q	p → q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	T