<u>離散数学</u>

関係 と 関数

落合 秀也

前回の復習: 集合

- キーワード

  集合, 要素, 部分集合, 普遍集合, 空集合, 集合の演算, 双対性, 集合代数の法則, 集合の集合 (=類), べき集合

- 記号

  $\{\ldots\}$,$\in$, $\subset$, $\supset$, $=$, U, Φ, $\cup$, $\cap$, $-$, $\times$, $[\ldots]$, 2^A

今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係，分割，商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係, 分割, 商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

2項関係

- 集合Aから集合Bへの2項関係 R は、直積A×Bの部分集合

$$R \subset A \times B$$

- $(x, y) \in R$のとき、xとyはR-関係(relation)にあるといい

$$xRy$$

  と表現する

- 以下、"関係"とは特に断りが無い限り、2項関係のことを指すものとする

例1:

- A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}とすると、
- A×B = { (1, a), (1, b), (1, c),
  (2, a), (2, b), (2, c),
  (3, a), (3, b), (3, c) }

  である。

ここで、

R = { (1, a), (2, b), (3, b), (3, c) }

は、AからBへの関係である。

例2:

- 色の集合A = {赤, 黄}, モノの集合 B = {リンゴ, ミカン} を考察しているものとする。

- いま、目の前に、(1) 赤いリンゴ, (2) 黄色いリンゴ, (3) 黄色いミカン がある。
- それらの色とモノの関係 Rは、

$$_{赤}R_{リンゴ} \qquad _{黄}R_{リンゴ} \qquad _{黄}R_{ミカン}$$

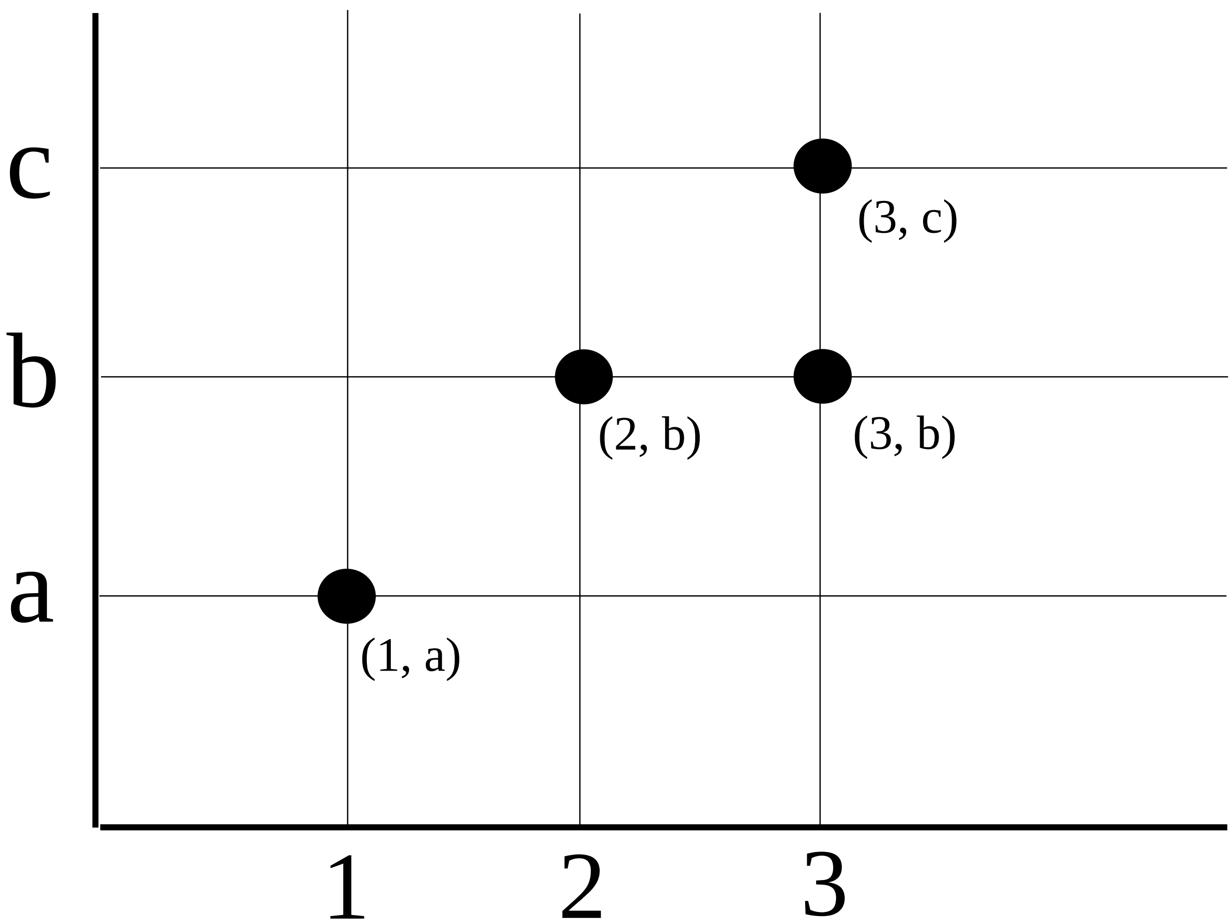
であり、

R = { (赤, リンゴ), (黄,リンゴ), (黄, ミカン)}

である。

関係の表現方法1：座標図 (Coordinate Diagram)

A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}, R = { (1, a), (2, b), (3, b), (3, c) }



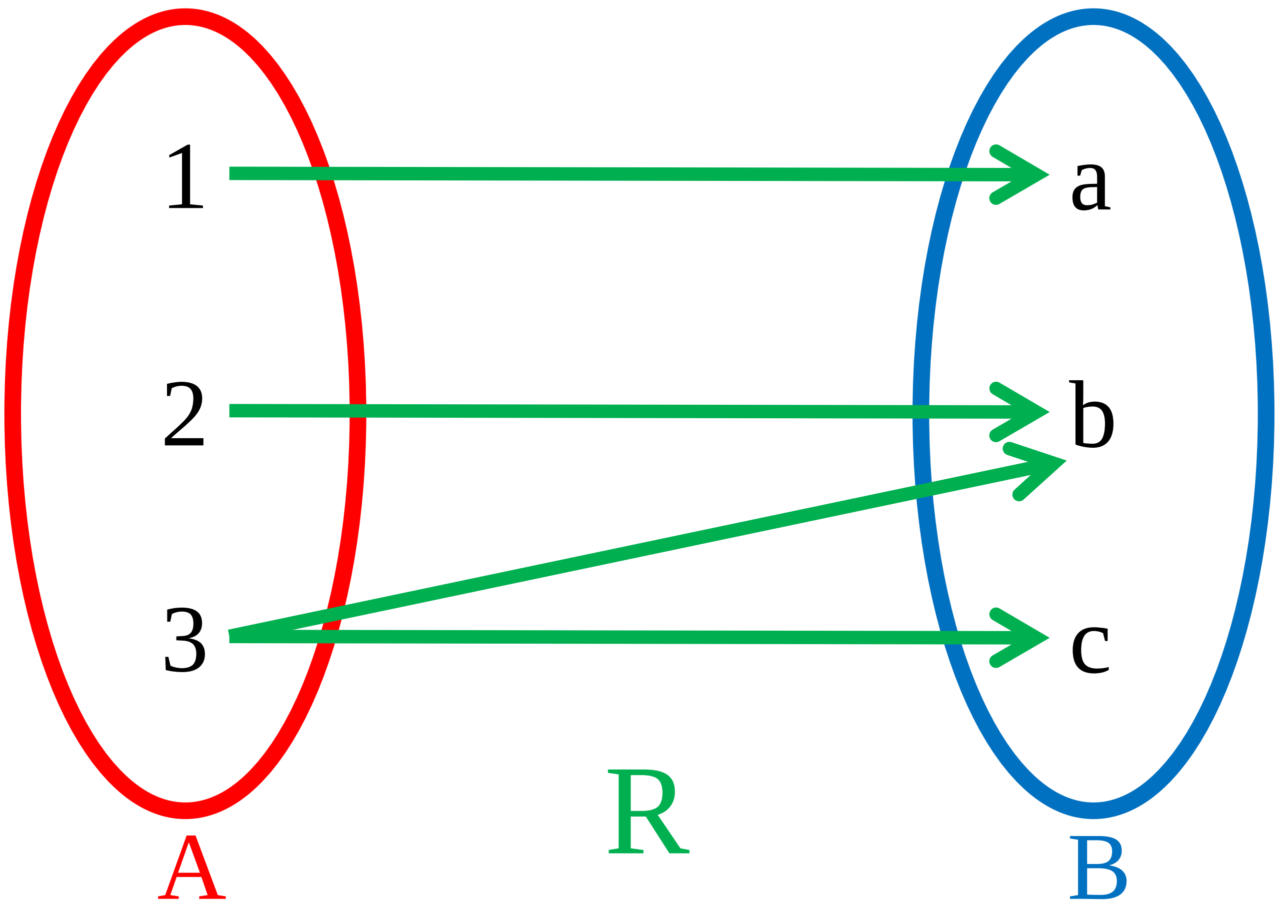
関係の表現方法2：
関係Rの行列 (Matrix of the Relation)

A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}, R = { (1, a), (2, b), (3, b), (3, c) }

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	1	1

関係の表現方法3：矢線図 (Arrow Diagram)

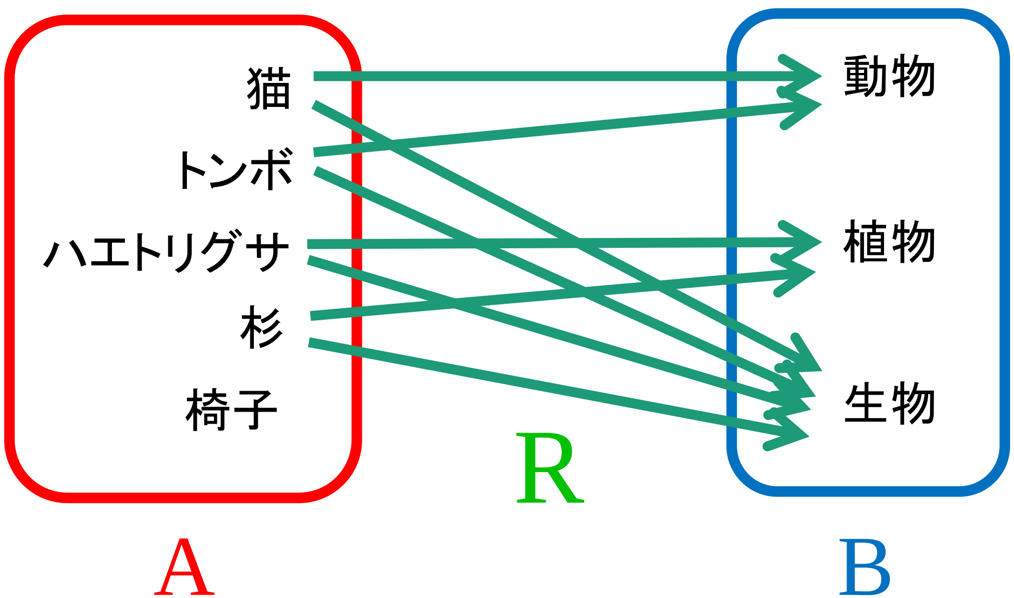
A={1, 2, 3}, B={a, b, c}, R={ (1, a), (2, b), (3, b), (3, c) }



練習

- 集合A={ 猫, トンボ, ハエトリグサ, 杉, 椅子} から、集合B={ 動物, 植物, 生物 }への関係Rを(常識的に)定義し、矢線図で表現せよ

R={ (猫, 動物), (猫, 生物), (トンボ, 動物), (トンボ, 生物),
(ハエトリグサ, 植物), (ハエトリグサ, 生物), (杉, 植物), (杉, 生物) }

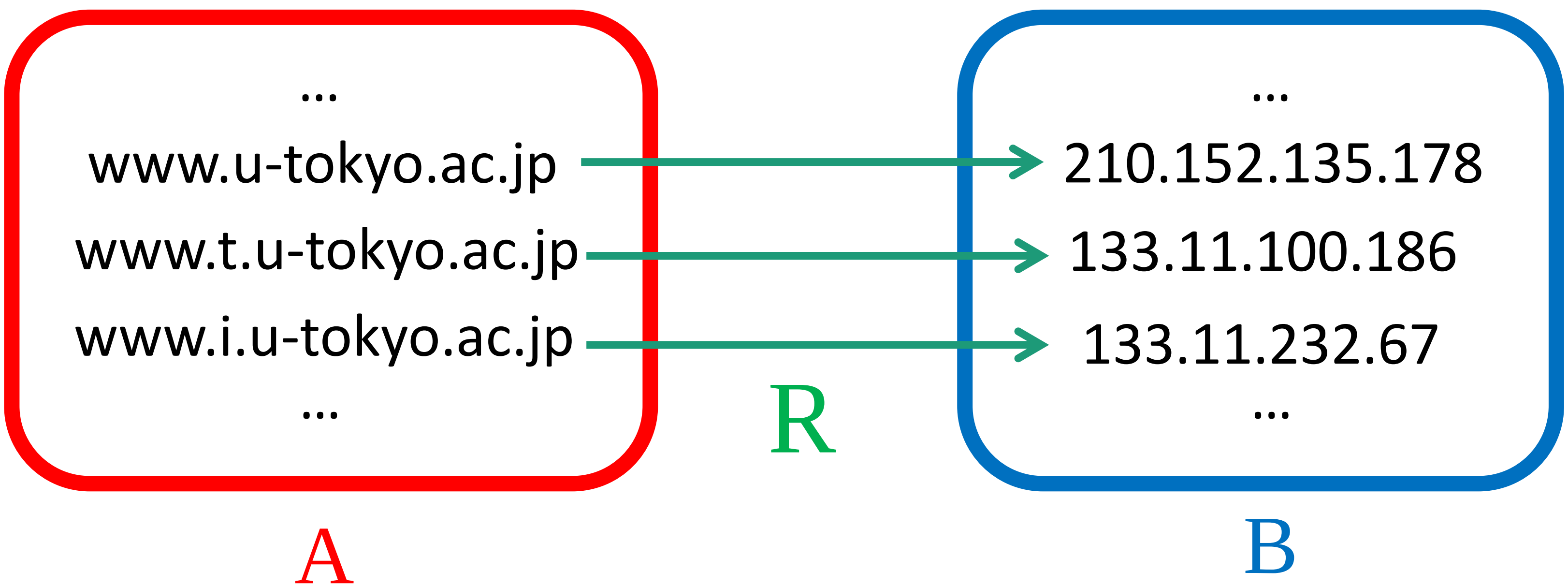


情報分野での応用: Domain Name System (DNS)

- A: ドメイン名の集合, B: IPアドレスの集合

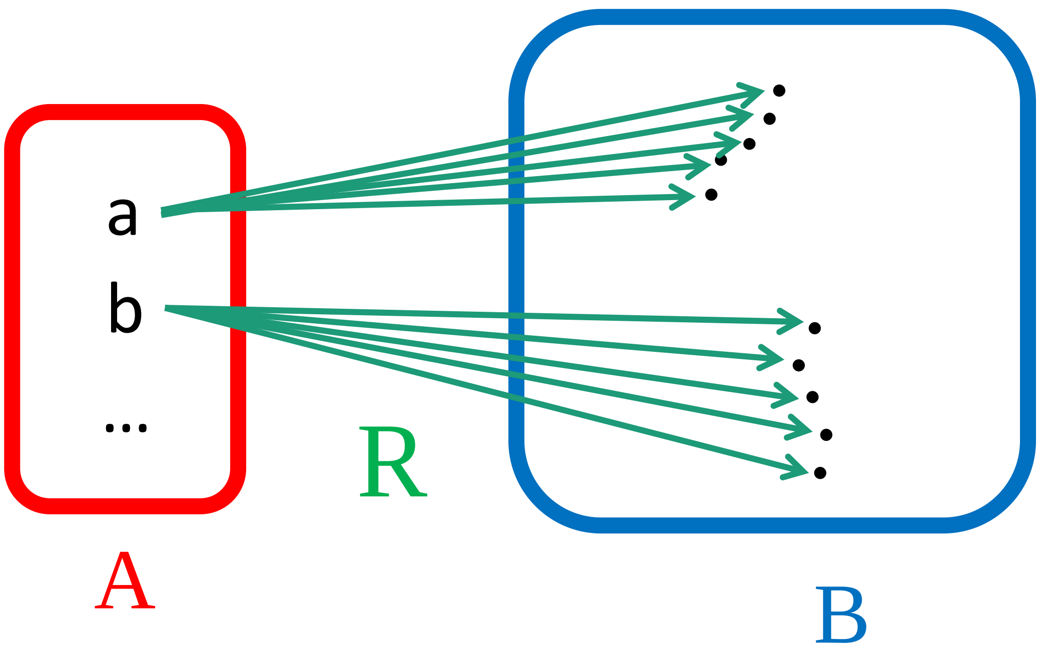
R = { (www.u-tokyo.ac.jp, 210.152.135.178),
(www.t.u-tokyo.ac.jp, 133.11.100.186),
(www.i.u-tokyo.ac.jp, 133.11.232.67)}

は、ドメイン名からIPアドレスへの関係を定義する



情報分野での応用: Big Dataの管理・解析

- A: 人の集合, B: 地点の集合
- スマホからサーバに報告された (人, 地点) の集合 R



考察

- 関係Rは、単一の集合の枠を超えて、異なる世界(異なる考察対象)を結びつけている

  A: ドメイン名の集合　(e.g., www.u-tokyo.ac.jp $\in$ A)

  B: IPアドレス全体の集合 (e.g., 210.152.135.178 $\in$ B)

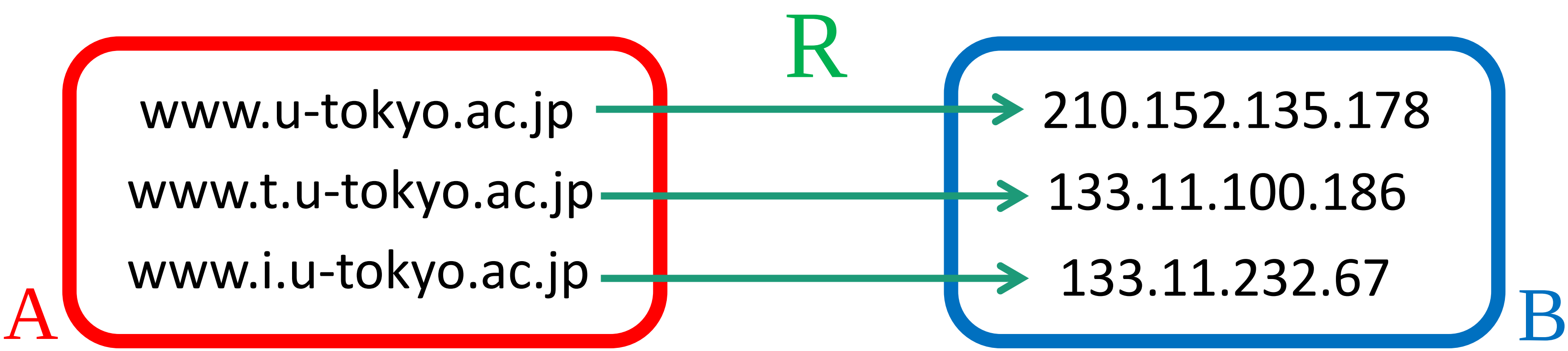
$$\mathrm{www.u\text{-}tokyo.ac.jp}\ R\ \mathrm{210.152.135.178}$$

- 任意の集合に対して、何らかの関係を定義可能
  - $R \subset A \times B$
  - AかBがΦならば R=Φとする関係を作ればよい

- 関係が、意味を生み出す（のではないか？）

意味とは何か：DNSの例

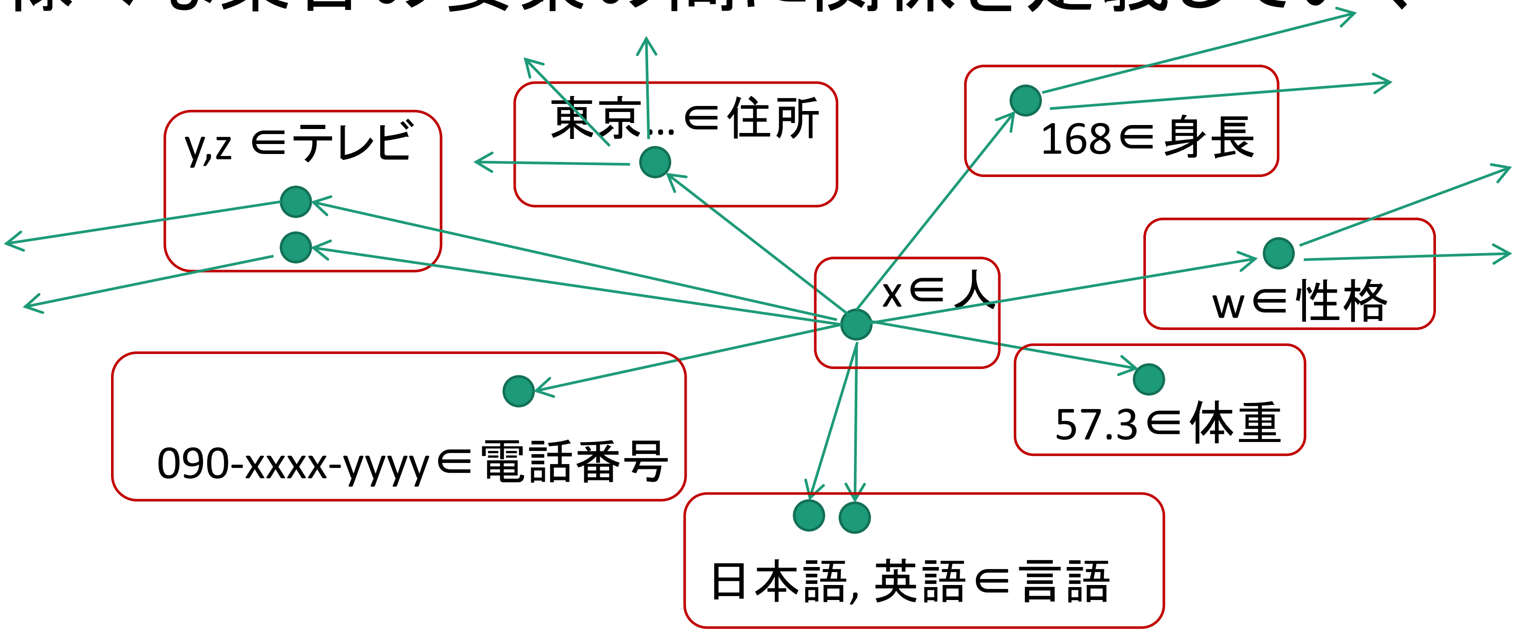
- ユーザが、ブラウザ上に、www.u-tokyo.ac.jpと入力する
- しかし、コンピュータは、IPアドレスで通信の宛先を指定しなければサーバとは通信ができない。
- 「www.u-tokyo.ac.jp とは 210.152.135.178である」という解釈が必要
- この解釈を行うための(関係)定義が、DNSによって与えられている



「関係の定義 (= 意味づけを与えている)」
「関係の利用 (= 意味の解釈を行っている)」

意味とは何か：
オントロジー (Ontology) 哲学

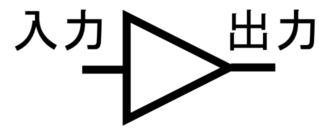
- 様々な集合の要素の間に関係を定義していく



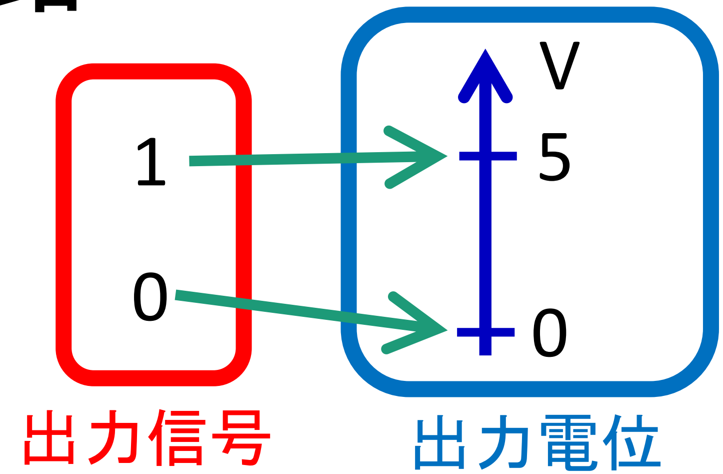
- 定義を上手に作って、利用できるようにすれば、推論を展開できるのではないか・・・
  - xは、〇〇に住んでいて、××の料理が好きだから、△△のレストランを、日本語で紹介してあげると喜ぶかもしれない
- 「意識」も、このようになっている、と考える人もいる

→参照：NHKスペシャル 超常現象―科学者たちの挑戦

意味とは何か：
5V系のデジタル回路

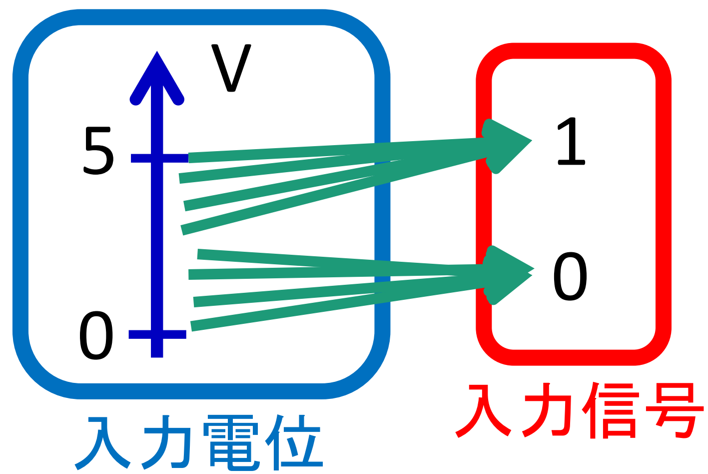


- 出力系
  - 出力信号 = $\{0, 1\}$
  - 出力電位 = $\{x \mid 0 \leqq x \leqq 5\}$
  - 関係 =$\{ (0,0), (1,5) \}$



“1”なら5Vを出します、という意味

- 入力系
  - 入力電位 = $\{x \mid 0 \leqq x \leqq 5\}$
  - 入力信号 = $\{0, 1\}$
  - 関係



$= \{(x,0), (y,1) \mid 0 \leqq x \leqq 2.5,\ 2.5 < y \leqq 5\}$

入力電位が 2.5V～5Vなら、“1”と捉えます、という意味

今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係, 分割, 商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

単一集合上の関係

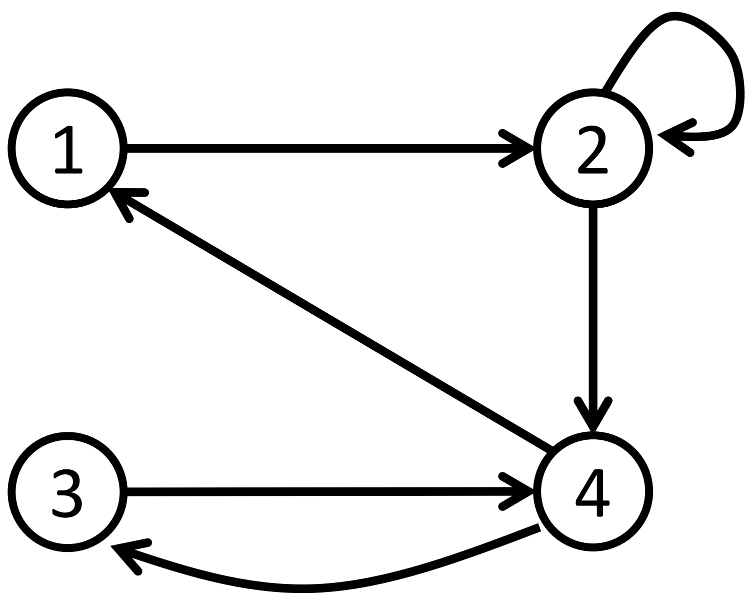
- 集合Aから集合Aへの関係$R \subset A \times A$を考えるとき
  Rは、A上の関係であるという。

- 例
  - A を 整数の集合とする
  - $x \in A$から、$x+1$ というAの要素への関係をRとする
  - この場合 $R = \{ (x, x+1) \mid x \in A \} \subset A \times A$であり、Rは A上の関係である、という。

単一集合上の関係:
有向グラフ(Directed Graph)での表現

単一集合上の関係は、有向グラフで表現することもある

R={ (1,2), (2,2), (2,4), (3,4), (4,1), (4,3) }の例



今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係, 分割, 商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

相等性 (equality)

＝

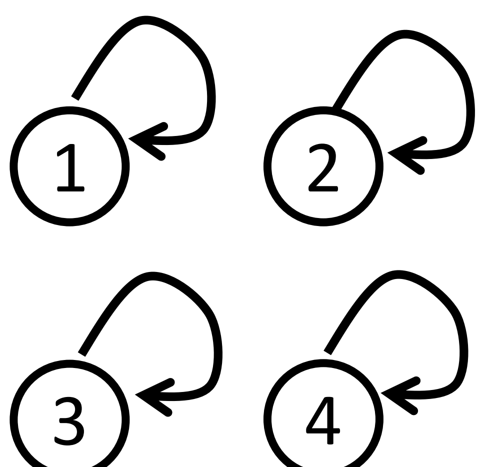
の意味について考える

- Aを任意の集合とする。このとき、
- A上の相等性の関係

$$\{ (a, a) \mid a \in A \}$$

を考えることができる。

- この関係のことを “＝” で表す



全体関係 (universal relation) 空関係 (empty relation)

- A上の任意の関係Rは

$$\Phi \subset R \subset A \times A$$

  を満たす

- 特に、

$$R = A \times A$$

  を全体関係と呼び、

$$R = \Phi$$

  を空関係と呼ぶ

逆関係

- AからBへの関係を R とする。
- Rの逆 (inverse) は、

$$R^{-1}$$

と表記し、次のように定められる

$$R^{-1} = \{ (b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

- つまり、$bR^{-1}a$ であるのは、

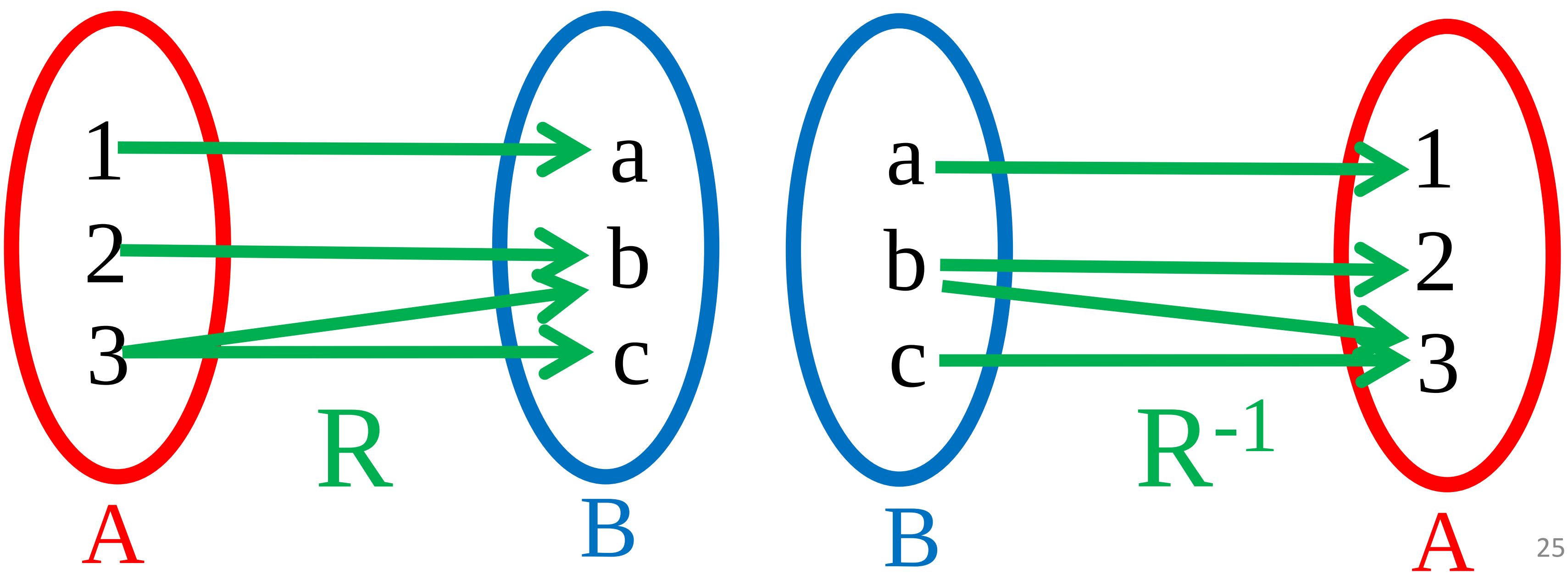
$$aRb$$

であるとき、かつ、このときに限る。

練習

- $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$, $R=\{ (1,a), (2,b), (3,b), (3,c) \}$ であるとき、$R^{-1}=\{\ldots.\}$を求めよ。また、RおよびR^{-1}を、それぞれ、矢線図で図示せよ。

$R^{-1}=\{ (a,1), (b,2), (b,3), (c,3) \}$



今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係, 分割, 商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

関係の性質

- Rを集合A上の関係とし、以下、$a \in A$, $b \in A$とする。
- aRa
  - Rは反射的(reflexive)である
- aRb → bRa
  - Rは対称的 (symmetric)である
- aRb かつ bRa → a=b
  - Rは反対称的 (anti-symmetric)である
- aRb かつ bRc → aRc
  - Rは推移的 (transitive)である

練習

- 集合を要素とする集合(=類)上の、包含関係⊂ の性質(反射的、対称的、反対称的、推移的)について論じよ

- 解:
  - A⊂A であるから、⊂ は反射的である
  - A⊂Bであっても、B⊂A とは限らないので、⊂は対称的ではない
  - A⊂BかつB⊂Aであれば、A=Bであるから、⊂は反対称的である
  - A⊂BかつB⊂Cであれば、A⊂Cであるから、⊂は推移的である

練習

- 任意の集合上の相等関係 = の性質(反射的、対称的、反対称的、推移的)について論じよ

- 解:
  - a = a であるから = は反射的である
  - a = b であれば、b = a なので = は対称的である
  - a = b かつ b = a ならば、a = b なので = は反対称的である
  - a = b かつ b = c であれば、a = c なので = は推移的である

(*) 対称的である関係と反対称的である関係は、互いに背反ではない。

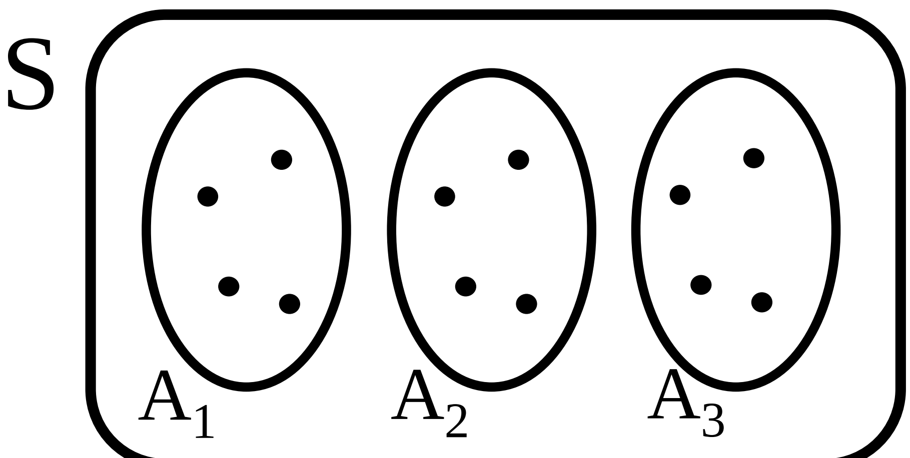
今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係, 分割, 商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

同値関係 (Equivalence Relation)

- 集合S上の関係Rが、
  - 反射的である　(aRa)
  - 対称的である　(aRb → bRa)
  - 推移的である　(aRb ∧ bRc → aRc)

  とき、Rは同値関係である、と呼ばれる。



S の部分集合Ai(ただしAiは互いに素、かつSの各要素はいずれかのAiに属する)とするとき、
Sの要素a, bが 同じAi に属するという関係R={(a, b) | a ∈ Ai, b∈Ai}
が、同値関係である

例

- あるC言語のプログラムの変数の集合 {a, b, c, d, e, f} において、“同じ型にある関係R”は、同値関係である

- int a = 20;
- int b = 213;
- int c=-80;
- float d = 21.3;
- float e = 31.212;
- float f = 19.2;

int 型変数の集合 {a, b, c}
float 型変数の集合 {d, e, f}

xRx は成立
xRy → yRxは成立
xRy かつ yRz → xRz は成立

分割と同値類・・・そして商集合

- 分割 (Partition)
  - 空でない集合Sの分割とは、以下を満たす類 $\{ A_i \}$ である。
    - $\{ A_i \}$ の各集合は互いに素である
    - Sの各要素aは一つのA_iに属する
- 同値類 (Equivalent Class)
  - Rを、集合S上の同値関係とする
  - $s \in S$に対して、sと同値関係にある要素の集合をSの同値類と呼び、[s] と書く

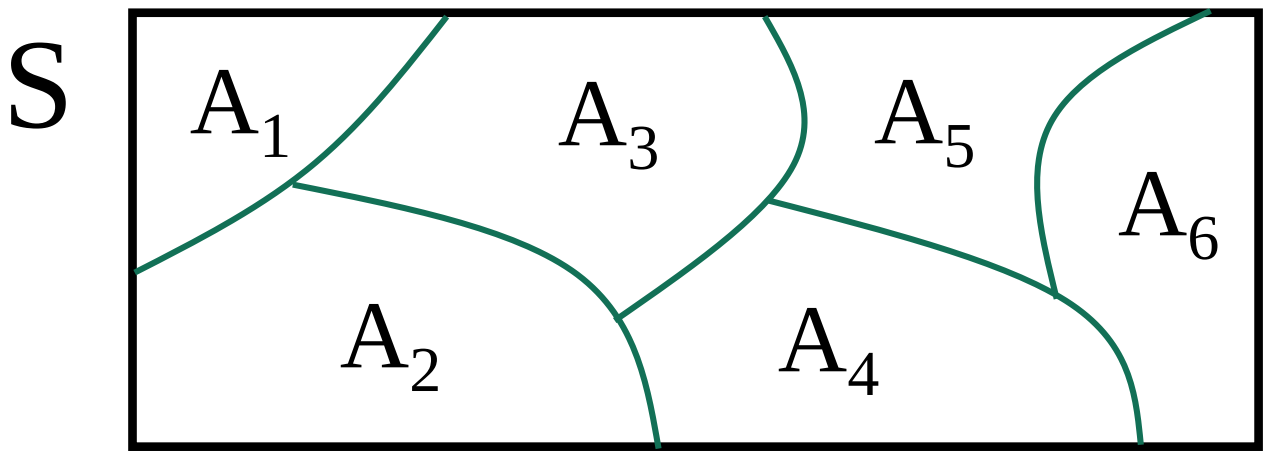
$$[s] = \{ x \mid (s, x) \in R \}$$

- 商集合(Quotient Set)
  - Sの同値類の集合
  - SのRによる商
  - S/R で表す

$$S/R = \{ [s] \mid s \in S \}$$

分割 (Partition)

- 空でない集合Sの分割とは、以下を満たす類 $\{ A_i \}$ である。
  - $\{ A_i \}$ の各集合は互いに素である
  - Sの各要素aは一つのA_iに属する

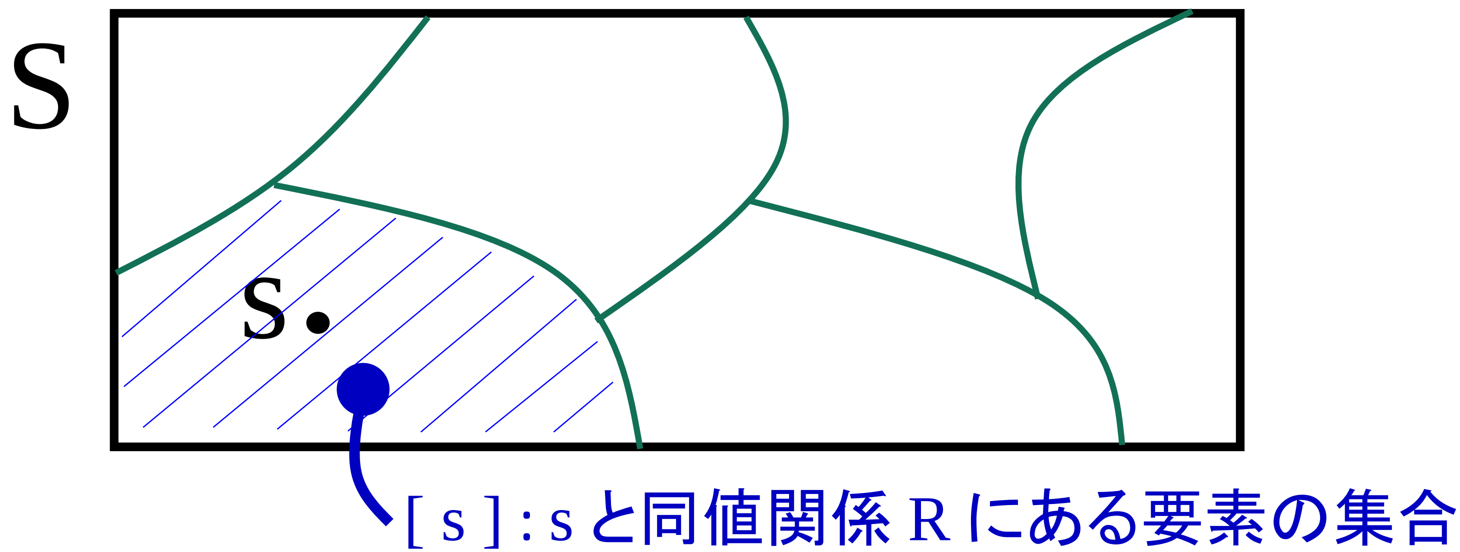


Sの分割例: $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

同値類 (Equivalent Class)

- Rを、集合S上の同値関係とする
- s ∈ Sに対して、sと同値関係Rにある要素の集合をSの同値類と呼び、[s] と書く

$$[\, s\,] = \{\, x \mid (s, x) \in R \,\}$$

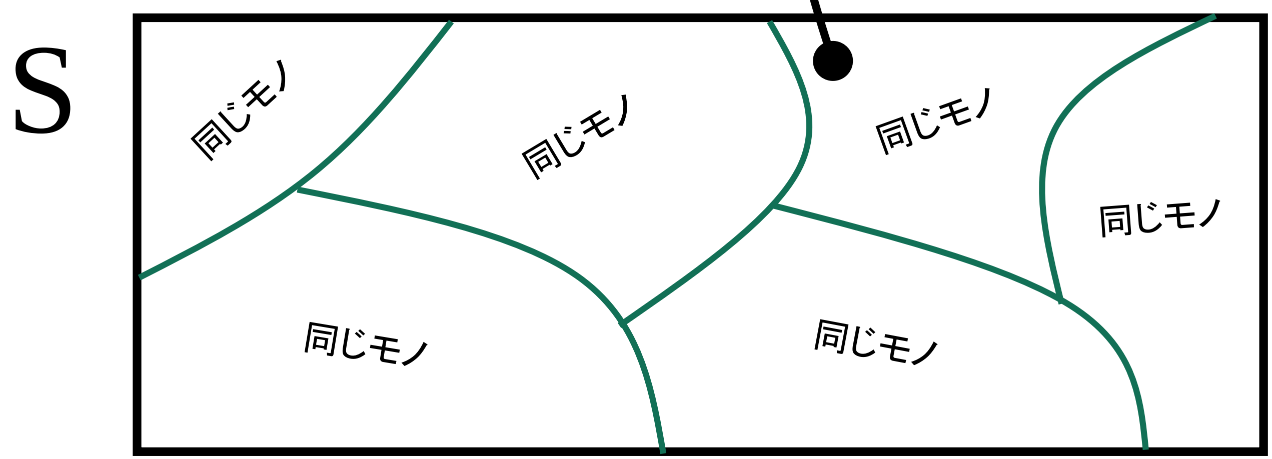


商集合 (Quotient Set)

- Sの同値類の集合
- SのRによる商
- S/R で表す

$S/R = \{ [s] \mid s \in S \}$

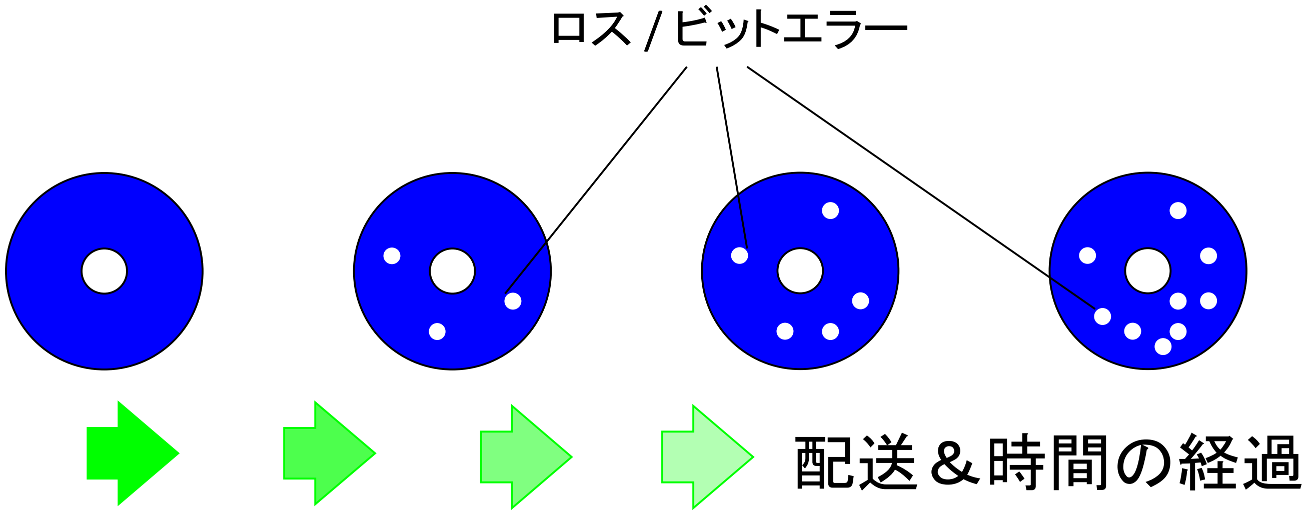
Rの観点で見たときに、
この中は「同じモノ」である
Rは境界線を持ち、その境界線でSを分割できる



SのRによる商: S/R

応用: 前方誤り訂正 (1/3) (FEC: Forward Error Correction)

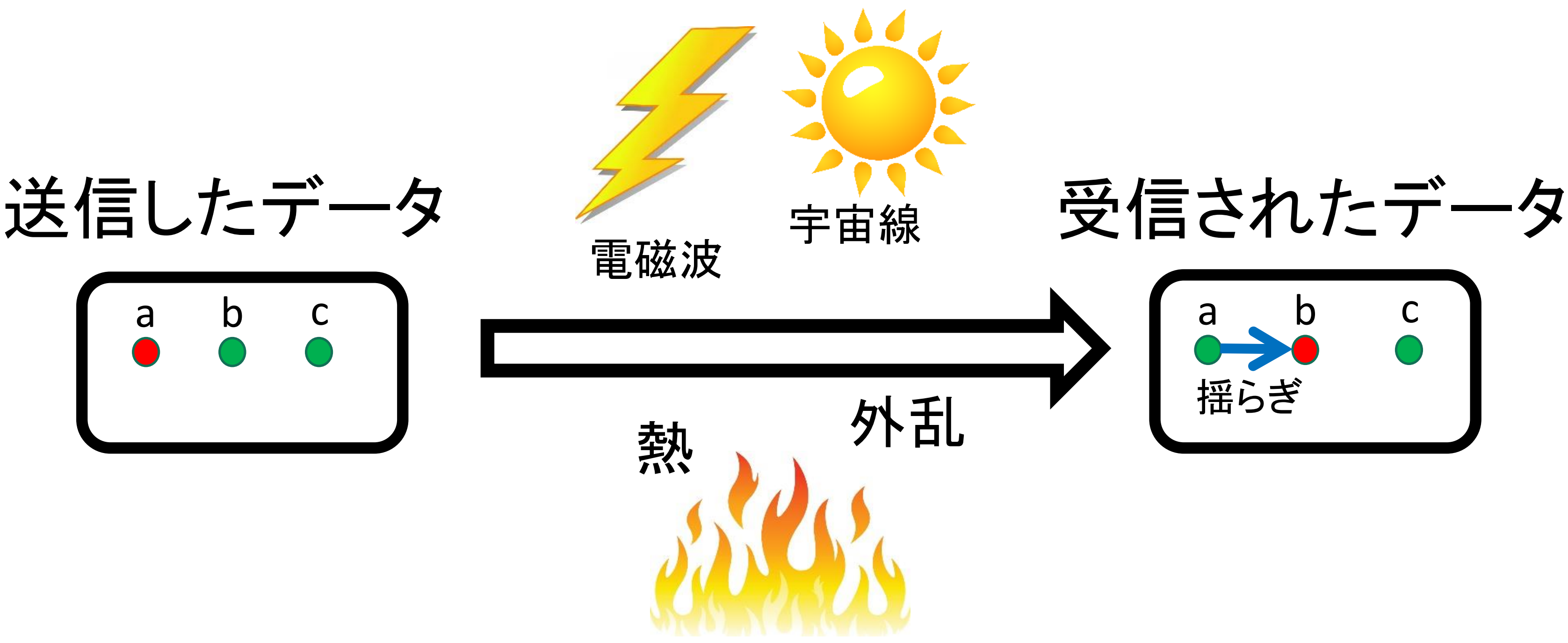
- 情報(ここでは、ビット列を考える)は、伝搬する間、保管されている間、解読時に、失われることがある



- 一部が失われても、元のビット列を復元することを可能にする、前方誤り訂正という技術がある。

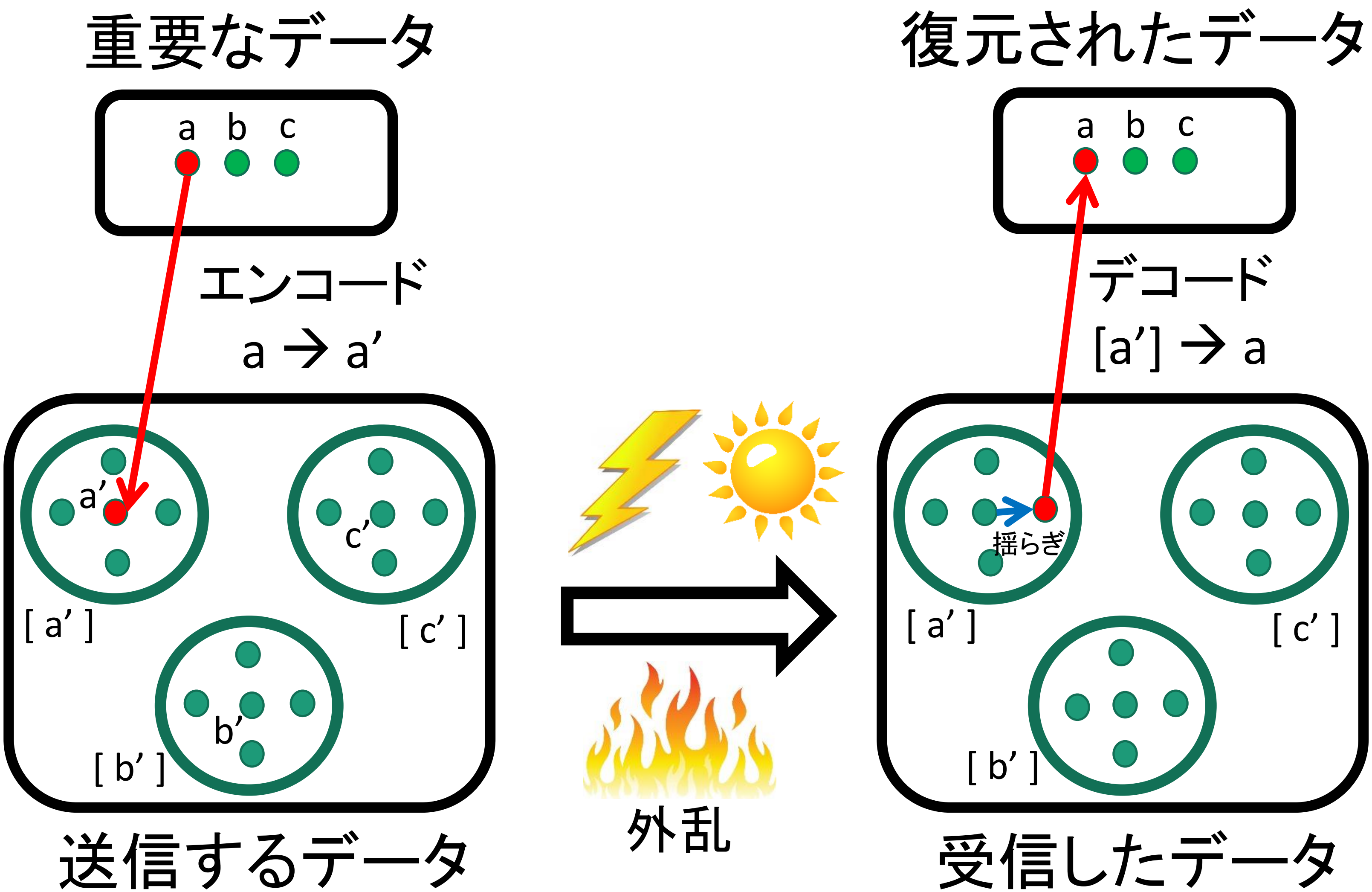
応用: 前方誤り訂正 (2/3)
誤り(揺らぎ)について考える

“a”というデータを送ったのに、あるビットの0と1が反転して、”b”になってしまうことがある。



応用: 前方誤り訂正 (3/3)

揺らぎが同値類に収まっていれば、復元可能



半順序関係 (Partial Ordering)

- 集合S上の関係Rが、
  - 反射的である　　　(aRa)
  - 反対称的である　　(aRb ∧ bRa → a=b)
  - 推移的である　　　(aRb ∧ bRc → aRc)

  とき、Rは半順序関係である、と呼ばれる。

- 例: ≦
- 詳細は来週の講義で

今日のテーマ: 関係 と 関数

- 関係 (2項関係)
- 単一集合上の関係
- 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係
- 関係の性質
- 同値関係，分割，商集合
- 半順序関係
- 関数
- 単射, 全射, 全単射

関数

- 集合Aの各要素に対し、集合Bの唯一の要素を割り当てる。
- そのような割当て全体のことを、AからBへの関数(function)と呼ぶ。(写像、変換と呼ぶ場合もある。)
  - A: 定義域 (domain)
  - B: 値域 (co-domain)

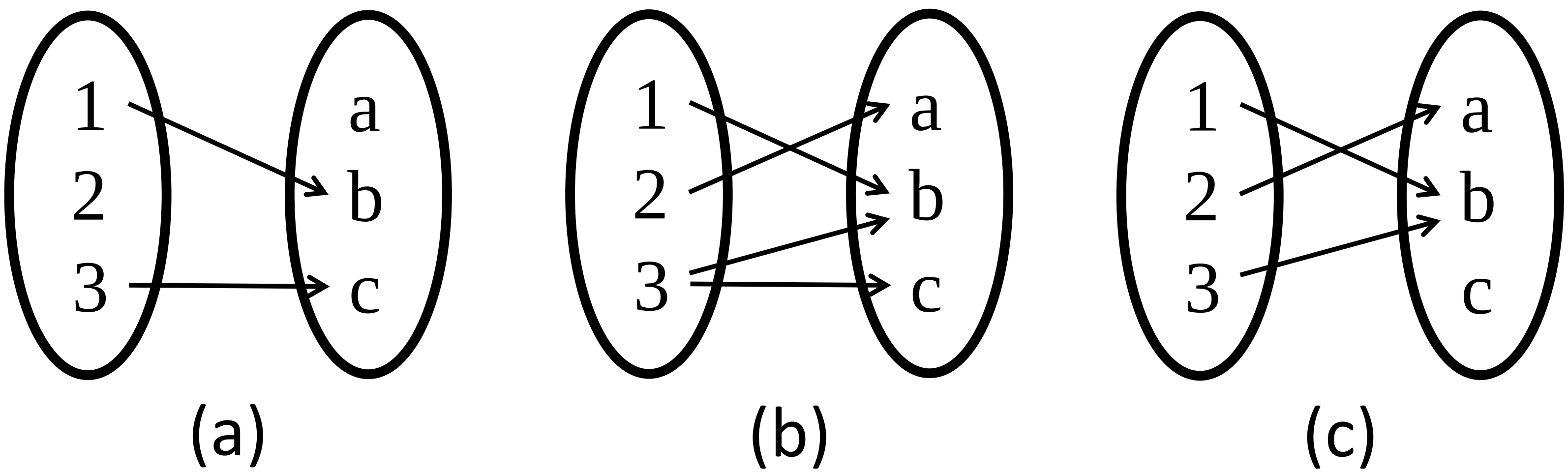
$$f: A \to B$$

“fはAをBにうつす”と読む

$a \in A$に対する、fのもとでのBの唯一の要素を、aの像(image) または aの値 (value) と呼び、f(a)と書く

練習

- (a), (b), (c)の各図が、A={1, 2, 3}からB={a, b, c}への関数を定義するか、論じよ。



解

(a)　関数ではない: (理由) 2の像がない

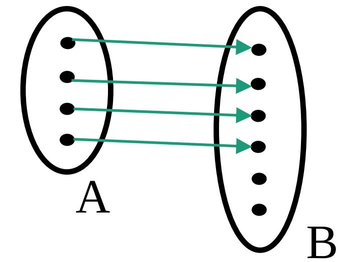
(b)　関数ではない: (理由) 3がB上の2つの要素に関係づけされている

(c)　関数である

1対1の関数, 上への関数, 逆関数

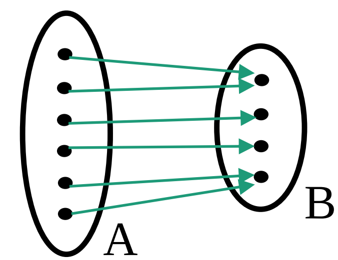
- 1対1の関数
  - 定義域の異なる要素が、異なる像を持つ場合

$$f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$$



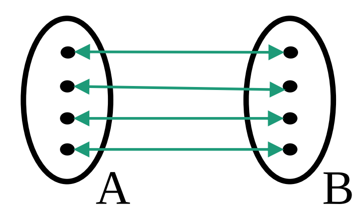
- 上への関数
  - Bの各要素がAのある要素の像となっている

$$f(A) = B$$



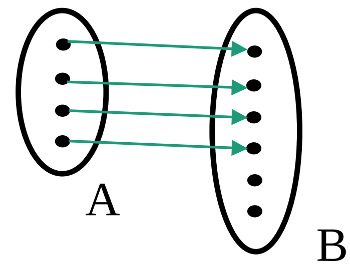
- 逆関数
  - 逆関係 f^{-1} がBからAへの関数であるとき

    (*) 一般に、逆関係が、関数であるとは限らない
  - この場合、fは可逆である、という。
    - fが可逆であるのは、fが1対1で上への関数であるとき(1対1対応(one to one correspondence)と呼ぶ)に限る

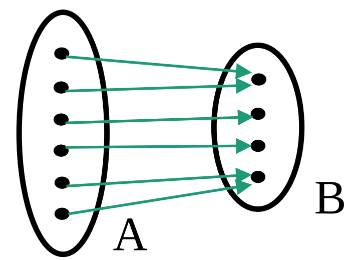


単射、全射、全単射

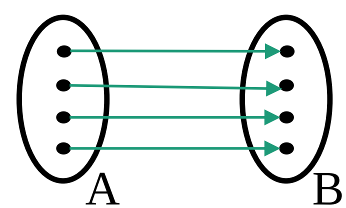
- 単射
  - 1対1のとき



- 全射
  - 上への関数のとき

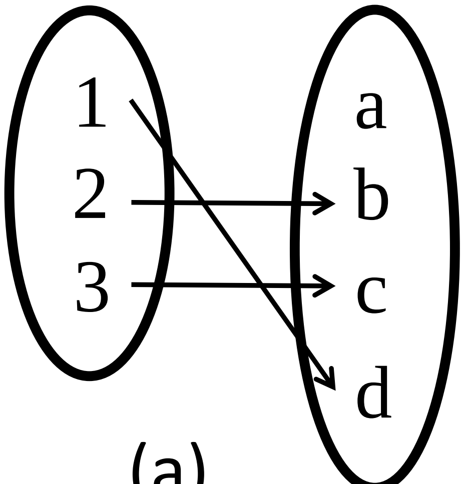


- 全単射
  - 1対1かつ上への関数 = 1対1対応のとき

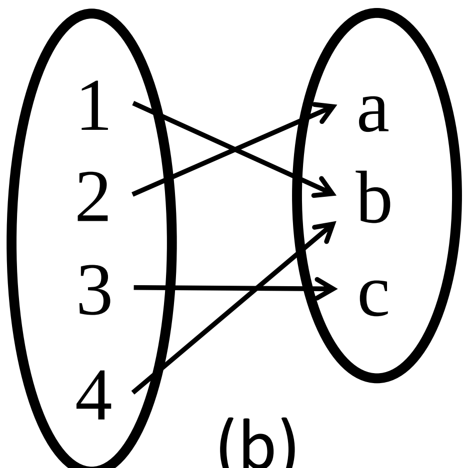


練習

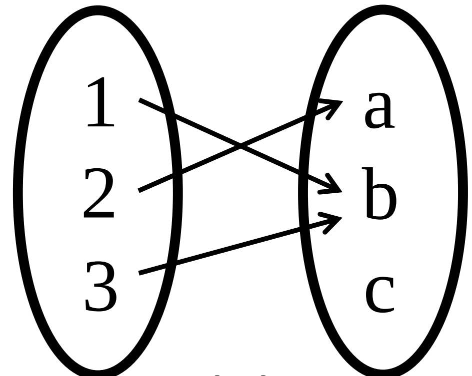
- (a)～(d)について、1対1の関数、上への関数、可逆な関数を答えよ。



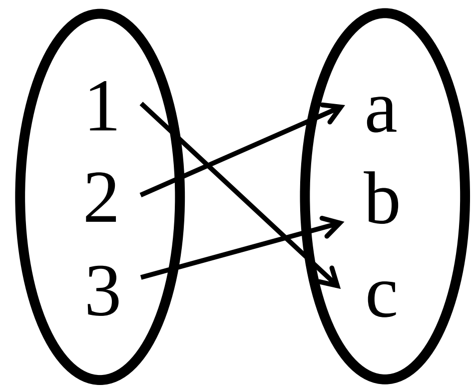
(a)



(b)



(c)

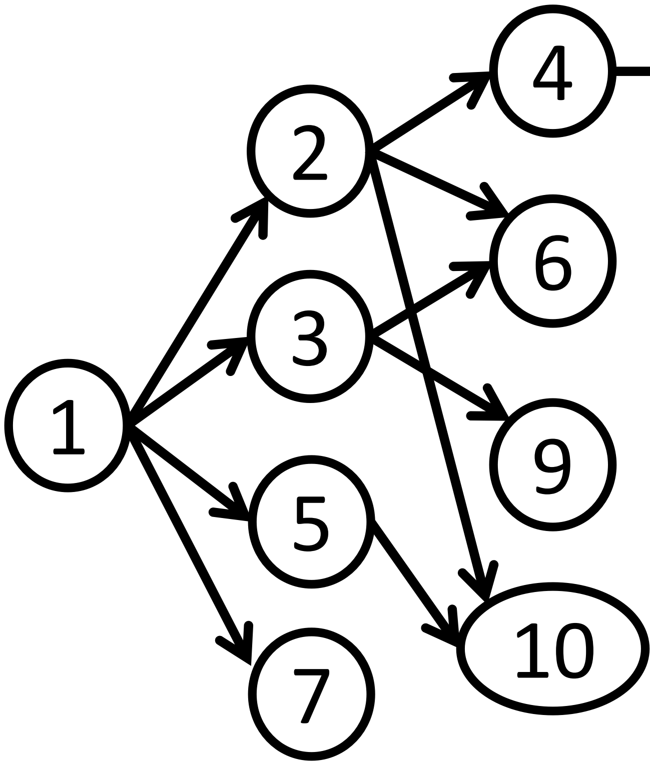


(d)

解

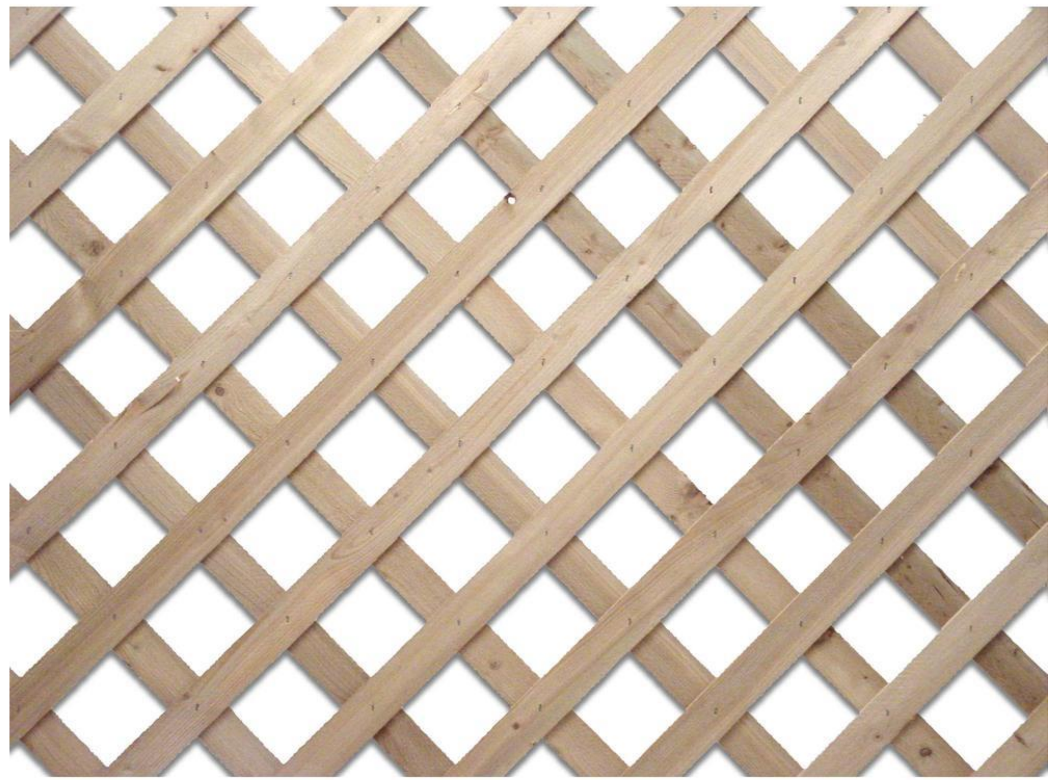
- 1対1の関数: (a), (d)
- 上への関数: (b), (d)
- 可逆な関数: (d)

次回(4月22日):順序集合 と 束



順序集合

束(Lattice)



引用: http://www.homedepot.ca/product/4-feet-x-8-feet-western-red-cedar-lattice/935813