離散数学

集合

落合 秀也

情報の世界を「集合」で考える
(1) IPアドレス

- インターネットに接続される世界中のコンピュータに付与される住所（Address）
  - 216.58.220.164 – Google の、とあるコンピュータ
  - 133.243.3.34 – NICTの、とあるコンピュータ
  - 157.82.13.244 – 東大工学部の、とあるコンピュータ

IPアドレスは
x.y.z.w （x, y, z, w は 0～255の整数)
の値(要素)で、世界中のコンピュータの住所を表す

IPアドレスの集合

0.0.0.0, … ,0.0.0.255,
0.0.1.0, … ,0.0.1.255,
…
255.255.255.0, … ,255.255.255.255

情報の世界を「集合」で考える
(2) プログラムの命令

- CPUに対する命令(アセンブリ言語)
  - MOV AX, 10 -- AXレジスタに10を入れる
  - ADD AX, DX -- AXレジスタとDXレジスタを足し合わせて その結果をAXレジスタに入れる
  - INC AX -- AXレジスタをインクリメント(+1)する

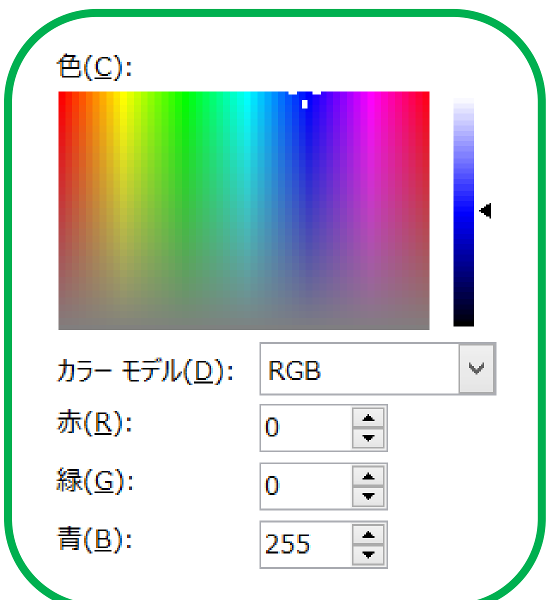
MOV, ...
ADD, SUB, MUX, ..
INC, DEC, ...
JMP, JNZ, ...

個々の命令(要素)が（CPUの動作と共に）定義されている

CPUには、チューリング完全な命令セット(集合)が用意され、これによって、我々は自由自在にプログラムを創造できる。

情報の世界を「集合」で考える (3) 色の表現

- コンピュータによる色の表現 (R, G, B)
  - (255,0,0) -- ■ 赤
  - (0,255,0) -- ■ 緑
  - (0,0,255) -- ■ 青



24ビット RGBカラー表現では、R(赤), G(緑), B(青)の光の三原色において、各色の強さを 0 ～ 255 の数値で表す

色全体は「集合」をなす

「集合(Set)」とは

- 考察対象の集まったもの
- 考察対象の取りうる値の領域（空間）

- 外延的表現 (extensional)
  - A={1, 2, 3}

- 内延的表現 (intentional)
  - A={x | xは 1≦x ≦3を満たす整数}

集合の要素(element)

- $x \in A$
  - xは集合Aの要素である
  - 要素xは集合Aに属する
  - 集合Aの要素xについて考える
  - 集合Aの要素をxとおく

元(member)とも言う

否定は

$x \notin A$

もしくは

$\neg x \in A$

と表記する

- AがIPアドレス全体の集合の場合

$$210.152.135.178 \in A$$

のように考えることが可能

(*) ブラウザで http://210.152.135.178/ にアクセスしてみよ

普遍集合 (Universal Set)

- 考察対象となる要素全体（世界）の集合
  - IPアドレス全体の集合
  - CPU命令全体の集合
  - 色全体の集合

U と表記することが多い

空集合 (Empty Set)

- 要素の存在しない集合
  - 「無」の空間
  - 要素の表現に必要な情報量は0ビット

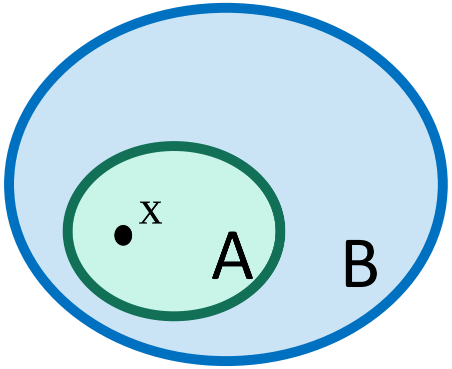
$\emptyset$ と表記する　　Φ や φ とも書く

$$\forall x, x \notin \Phi \Leftrightarrow \neg(\exists x, x \in \Phi)$$

$\forall x$: どんな x を取ってきても・・・
すべての x に対して・・・
$\exists x$: ・・・という x が存在する
何らかの x によって・・・・

- Φは何個存在するか？
  ➔ 唯一の存在である

部分集合



- A ⊂ B
  - 集合Aは集合Bに含まれる (contained)
  - 集合Aは、集合Bの部分集合 (subset)である
  - 集合Bは、集合Aの上位集合 (superset)である

$$A \subset B \iff \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

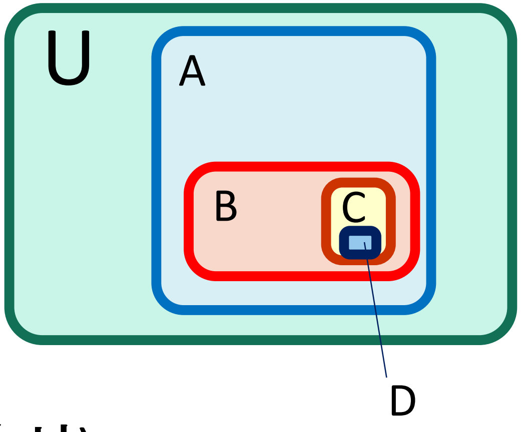
- A=B（集合A と集合Bが等しい）

$$\iff A \subset B \text{ かつ } A \supset B$$

部分集合
IPアドレス配布の例

- IPアドレス空間Uの切り出し＆配布は階層に行われている

IANA (Internet Assigned Numbers Authority)
↓ $U \supset A$
APNIC(RIR: 地域インターネットレジストリ)
↓ $A \supset B$
JPNIC(NIR: 国別インターネットレジストリ)
↓ $B \supset C$
指定事業者(LIR: ローカルインターネットレジストリ)
↓ $C \supset D$
エンドユーザ



D: 203.178.135.0 ～ 203.178.135.127

参考資料：https://www.nic.ad.jp/ja/basics/terms/allocation-assignment.html

練習

- $\Phi \subset \Phi$ であることを示せ

解１

$A \subset B \ \Leftrightarrow \ \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

であるから

$\forall x\,(x \in \Phi \rightarrow x \in \Phi)$ ・・・ (*)

が言えればよい

定義より、

$\forall x,\ x \notin \Phi$

なので、どんなxに対しても、

$x \in \Phi$

が成り立つことは無い。よって、

$x \in \Phi \rightarrow x \in \Phi$

は、どんなxに対しても成立する

つまり、(*)が成立する

解２

$A=B \ \Leftrightarrow \ A \subset B$ かつ $A \supset B$

である。また、

$\Phi = \Phi$

が言えるので、

$\Phi=\Phi \ \Rightarrow \Phi \subset \Phi$かつ $\Phi \supset \Phi$

ゆえに、

$\Phi \subset \Phi$

である

集合の演算

- 和 (union)
  - $A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$
- 積 (intersection)
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$
- 差 (difference)
  - $A - B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$

A\B と表記されることもある
(AマイナスBと読む)

- 補集合 (complement)
  - 普遍集合 U について考察しているときの概念
  - $A^c = U - A$
- 直積 (direct product, Cartesian product)
  - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

練習

- $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $U=\{1,2,3, \dots \}$ (正の整数)とする。このとき、以下を計算せよ

  $A \cup B =$

  $A \cap B =$

  $A - B =$

  $A^c =$

- 解

  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$　　$A \cap B = \{3, 4\}$

  $A - B = \{1, 2\}$　　$A^c = \{5, 6, 7, \dots\}$

集合代数における双対性

- 双対性, 双対原理 (principle of duality)
  - ある法則において $\cup, \cap, U, \Phi$ を $\cap, \cup, \Phi, U$ に置き換えても成立すること

- 例1: 分配の法則 (分配律)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ は 常に成り立つ

$\Updownarrow$ ・・・ 双対性

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ も同様に常に成り立つ

- 例2: 同一の法則 (同一律)

$A \cup \Phi = A$ は常に成り立つ

$\Updownarrow$ ・・・ 双対性

$A \cap U = A$ も同様に常に成り立つ

集合代数の法則
(どんなA, B, C に対しても以下が成立する)

- べき等律 (Idempotent Laws)

  1a. $A \cup A = A$ 1b. $A \cap A = A$

- 結合律 (Associative Laws)

  2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- 交換律 (Commutative Laws)

  3a. $A \cup B = B \cup A$ 3b. $A \cap B = B \cap A$

- 分配律 (Distribution Laws)

  4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- 同一律 (Identity Laws)

  5a. $A \cup \Phi = A$ 5b. $A \cap U = A$

  6a. $A \cup U = U$ 6b. $A \cap \Phi = \Phi$

集合代数の法則・・・つづき
(どんなA, Bに対しても以下が成立する)

- 対合律 (Involution Law)

  7. $(A^c)^c = A$

- 補元律 (Complement Laws)

  8a. $A \cup A^c = U$　　8b. $A \cap A^c = \Phi$

  9a. $U^c = \Phi$　　9b. $\Phi^c = U$

- ド･モルガンの法則 (DeMorgan’s Law)

  10a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$　　10b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

集合の集合 ･･･ 類 (Class)

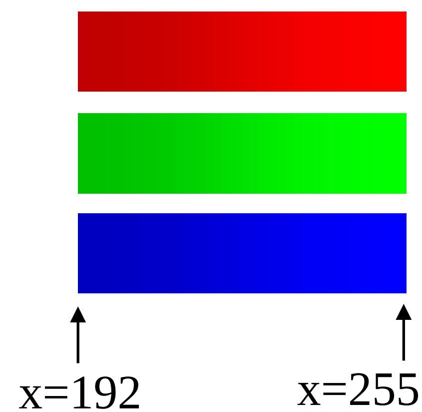
- 集合Aの部分集合X, Y, Z, ... を考察対象とすることがある
- すると X, Y, Z, ... を要素とする集合も考えられなくはない

- 例: 色全体の集合$U=\{(x,y,z) \mid 0 \leqq x, y, z \leqq 255\}$ に対し

　赤系の色$= \{ (x,0,0) \mid 192 \leqq x \leqq 255 \}$

　緑系の色$= \{ (0,x,0) \mid 192 \leqq x \leqq 255 \}$

　青系の色$= \{ (0,0,x) \mid 192 \leqq x \leqq 255 \}$



のような分類が考えられ、

　　[赤系の色, 緑系の色, 青系の色]

という集合(分類 = **類**)を考察対象とすることがありえる

類 (Class) の 他の例
(1) 年齢別

- 人々の年齢の集合Yを考える

- 個人の年齢は

  $$21.1123\ldots \in \mathrm{Y}$$

  のようにYの要素となる

- 統計処理の分野では、年代別の類$\mathcal{Y}$として

  $\mathcal{Y}$ = [0代, 10代, 20代, 30代, 40代, 50代, ...]

  を考察対象とする（のように分類する）ことがある。

類 (Class) の 他の例
(2) 地域

- 緯度経度で表現される地点の集合 L を考える

- ある地点は、

  $$(35.21341\ldots, 139.21312\ldots) \in \mathrm{L}$$

  のようにLの要素となる

- 地点の集合を地域で分類し、

  $\mathcal{L}$ = [文京区, 台東区, 豊島区, 千代田区, ...]

  を考察対象とすることがある

類 (Class) の 他の例
(3) コンピュータでの数値表現(データ型)

- 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を考える

- ある値は

$$2118.5 \in \mathbf{R}$$

のようにRの要素となる

- $\mathbf{R}$は無限に大きく、コンピュータではすべてを表現できない。
- そのため、$\mathbf{R}$の一部を表現する、データ型$\mathcal{T}$の概念を作り出している

$\mathcal{T}$= [int, unsinged int, long, unsinged long, float, double]

それぞれのデータ型は、$\mathbf{R}$の部分集合を表現可能。

$\mathcal{T}$は$\mathbf{R}$の部分集合の類と言える　例) $2118.5 \in \text{float} \subset \mathbf{R}$

類 (Class) の 他の例
(4) ドメイン名

- ドメイン名全体の集合 Dを考える

- 各ドメインは、

  www.u-tokyo.ac.jp $\in$ D

  のようにDの要素となる

- ドメインの分類として、

  $\mathcal{D}$ = [*.ac.jp, *.co.jp, *.ne.jp, *.go.jp, *.or.jp, …]

  を考察対象とすることがある。

  ここで、* は任意の意味。つまり、*.ac.jp はDの部分集合となる

類 (Class) の 他の例
(5) IPアドレスのクラス

- IPアドレス全体の集合を考える

- この場合、

  2.*.*.* = {2.x.y.z | 0≦ x, y, z ≦ 255}

  はIPアドレス全体の部分集合となる。

- IPの世界では、以下で定義されるクラス$\mathcal{A}$, クラス$\mathcal{B}$, クラス$\mathcal{C}$

  $\mathcal{A}$ = [0.*.*.*, 1.*.*.*, 2.*.*.*, … , 255.*.*.*]

  $\mathcal{B}$ = [0.0.*.*, 0.1.*.*, 0.2.*.*, … , 255.255.*.*]

  $\mathcal{C}$ = [0.0.0.*, 0.0.1.*, 0.0.2.*, … , 255.255.255.*]

  を考察対象とすることがある。

  (*) 昔は、この方法でIPアドレスを分割し、各組織に配布していた

練習

- 以下のファイルの集合があるものとする。

{ tennis.doc, soccer.doc, baseball.doc,

tennis_shot.jpg, soccer_shoot.jpg, baseball_hit.jpg }

この集合の類(= この場合、ディレクトリに相当するもの)を作ってみよ

解1:

tennis = {tennis.doc, tennis_shot.jpg },　soccer = {soccer.doc, soccer_shoot.jpg },

baseball = { baseball.doc, baseball_hit.jpg }

という部分集合を作り *sport* = [tennis, soccer, baseball] という類とする

解2:

doc = { tennis.doc, soccer.doc, baseball.doc }

jpg = {tennis_shot.jpg, soccer_shoot.jpg, baseball_hit.jpg }

という部分集合を作り *type* = [doc, jpg] という類とする

べき集合 (Power Set)

- 与えられた集合Aに対して、Aのすべての部分集合からなる類を、べき集合と呼び、

$$\mathcal{P}(\mathrm{A})$$

と表す
- 要素数は 2 の n(A)乗、つまり、

$$n(\mathcal{P}(\mathrm{A})) = 2^{n(\mathrm{A})}$$ (*) ここで n(A)はAの要素数を表す

である。
- そのため、Aのべき集合のことを 2^{A} と表すこともある

練習

- A = {1, 2, 3} の、べき集合 $\mathcal{P}$(A) を外延的に表現してみよ

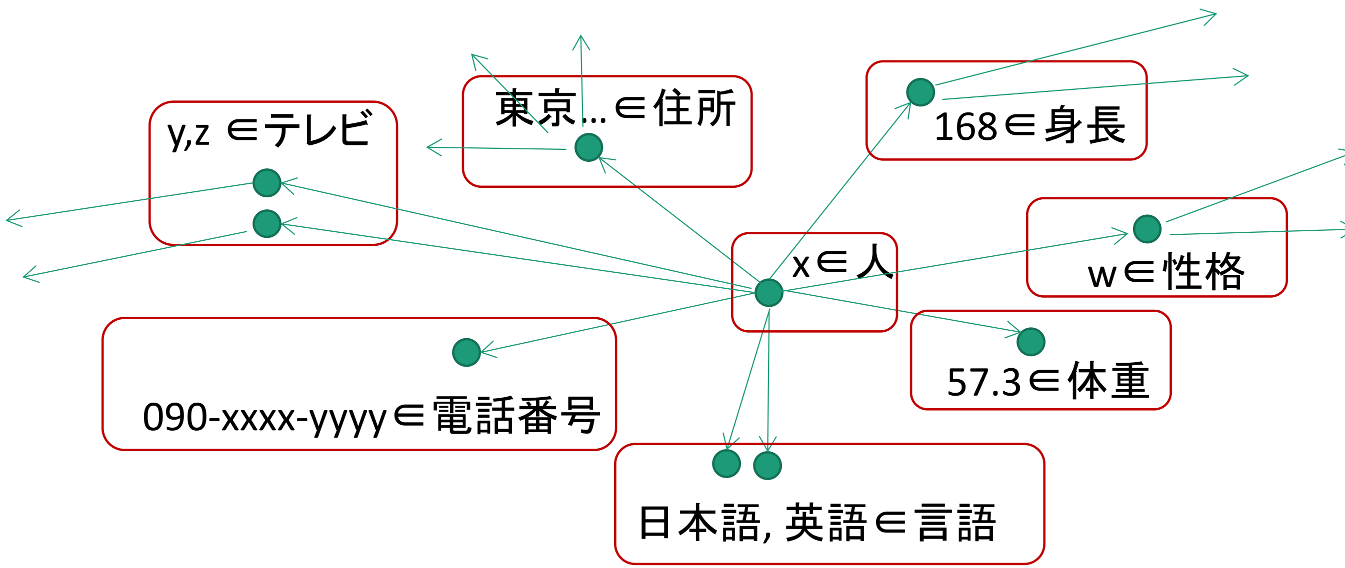
- 解:

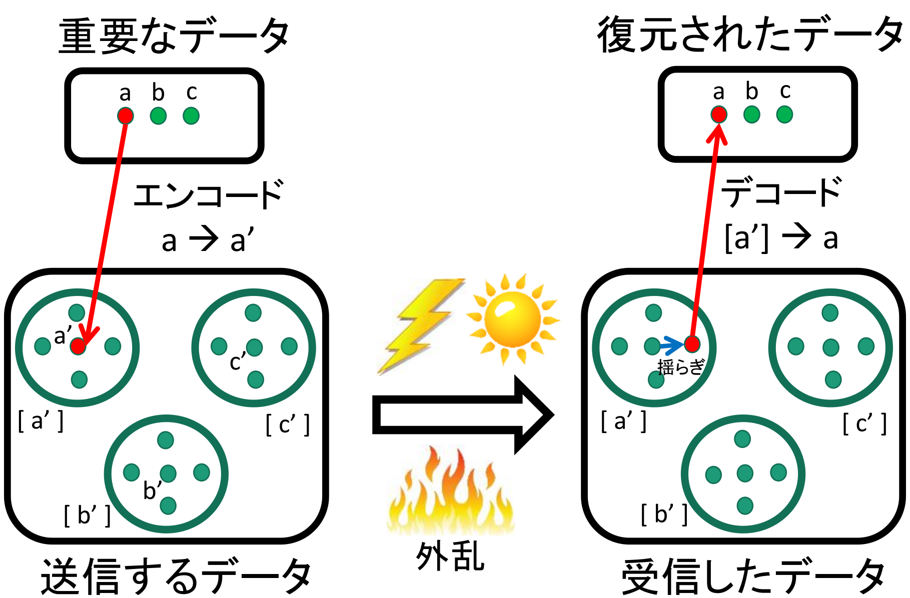
$$\mathcal{P}(A) = [\ \{\}\ , \{1\}, \{2\}, \{3\},\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\ \ ]$$

注: Φ = {} は、Aの部分集合である: i.e., $\Phi \subset A$
また、要素数は、確かに 2^3 となっている

次回(4月15日): 関係 と 関数

意味論
(Ontology)





前方誤り訂正
(FEC: Forward Error Correction)