離散数学

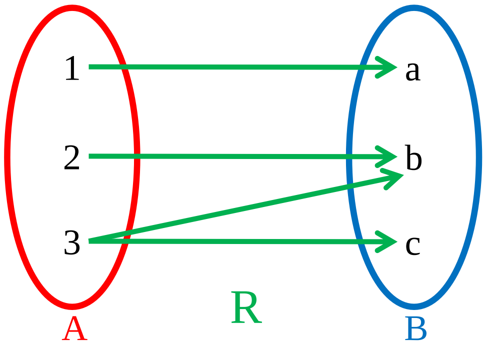
順序集合と束

落合 秀也

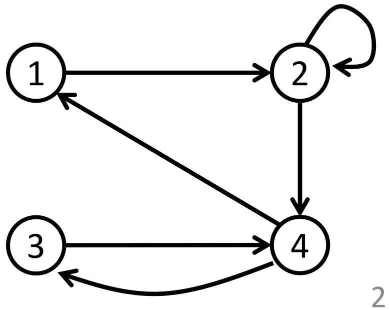
前回の復習: 関係 と 関数

- キーワード

  2項関係, 単一集合上の関係, 相等性, 全体関係, 空関係, 逆関係, 関係の性質, 同値関係, 同値類, 分割, 商集合, 半順序関係, 関数, 単射, 全射, 全単射



- 表現方法
  - 座標図、行列、矢線図、有向グラフ



- 記法
  - aRb, $(a,b) \in R \subset A \times B$,
    [s], S / R, $f: A \to B$

（復習）関係の性質

- Rを集合A上の関係とし、以下、$a \in A$, $b \in A$とする。
- aRa
  - Rは反射的(reflexive)である
- aRb → bRa
  - Rは対称的 (symmetric)である
- aRb かつ bRa → a=b
  - Rは反対称的 (anti-symmetric)である
- aRb かつ bRc → aRc
  - Rは推移的 (transitive)である

今日のテーマ: 順序集合 と 束

- 半順序集合
- 直前、直後、図式
- 比較可能、全順序

- 束
  - 結び、交わり、上限、下限
  - 半束
  - 順序の中の束、束の上の順序

今日のテーマ: 順序集合 と 束

- 半順序集合
- 直前、直後、図式
- 比較可能、全順序

- 束
  - 結び、交わり、上限、下限
  - 半束
  - 順序の中の束、束の上の順序

半順序集合 (Partially Ordered Set)

- 集合S上の関係Rが、
  - 反射的である (aRa)
  - 反対称的である (aRb かつ bRa → a=b)
  - 推移的である (aRb かつ bRc → aRc)

  であれば、この関係を、S上の半順序と呼ぶ。

- S上の半順序を持つ集合Sを、半順序集合または順序集合(partially ordered set, poset)と呼ぶ

例1：「自然数全体」の集合と ≦

- 大小関係 ≦ は、自然数全体N上の半順序である

- 理由　(a, b, c ∈Nとする)
  - a≦a であるから、≦ は反射的である
  - a≦bかつb≦aであれば、a=bであるから、≦は反対称的である
  - a≦bかつb≦cであれば、a≦cであるから、≦は推移的である

(*) 実際、≦ は実数の任意の部分集合上の半順序である

例2:「集合」の集合 と ⊂

- 任意の集合族(集合の集合のこと)上の、包含関係⊂ は半順序である

- 理由
  - A⊂A であるから、⊂ は反射的である
  - A⊂BかつB⊂Aであれば、A=Bであるから、⊂は反対称的である
  - A⊂BかつB⊂Cであれば、A⊂Cであるから、⊂は推移的である

練習：「自然数全体」の集合 と|

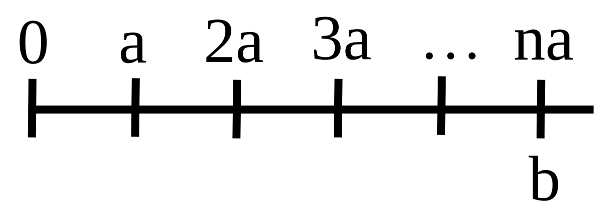
- 自然数全体の集合Nを考える。
- a, b ∈ N に対し、”aはbを割り切る”の関係(=整除関係)を a|b と表記することにする。つまり、

$$a|b \Leftrightarrow \exists n \in N,\ na=b$$

(*) 例えば、2|8, 3|6, 12|60などがある。

- このとき、整除関係| はN上の半順序であることを示せ。

a|b



bはaの後に存在する

- 解：(a, b, c ∈ Nとする)
  - a|aなので、|は反射的である
  - a|bかつb|aであればa=bなので、|は反対称的である
  - a|bかつb|cであれば、a|cなので、|は推移的である

(よって、|はN上の半順序である)

半順序の記法

- 半順序(関係)を、通常は $\lesssim$ を使い、

$$a \lesssim b$$

  のように書き、

  a はbの前にある

  と読む

- 関連記号
  - $a \prec b$:　$a \lesssim b$ かつ $a \neq b$ の意味 (aは真にbの前にある)
  - $a \gtrsim b$:　$b \lesssim a$ の意味 (aはbの後にある)
  - $a \succ b$:　$b \prec a$ の意味 (bは真にaの後にある)

  (*) $\gtrsim$ は $\lesssim$ の逆関係である (逆順序: inverse order)

今日のテーマ: 順序集合 と 束

- 半順序集合
- 直前、直後、図式
- 比較可能、全順序

- 束
  - 結び、交わり、上限、下限
  - 半束
  - 順序の中の束、束の上の順序

直前、直後

- Sを半順序集合とする。
- a,b $\in$ Sに対し、aがbの直前にある(immediate predecessor)ことを

$$a \ll b$$

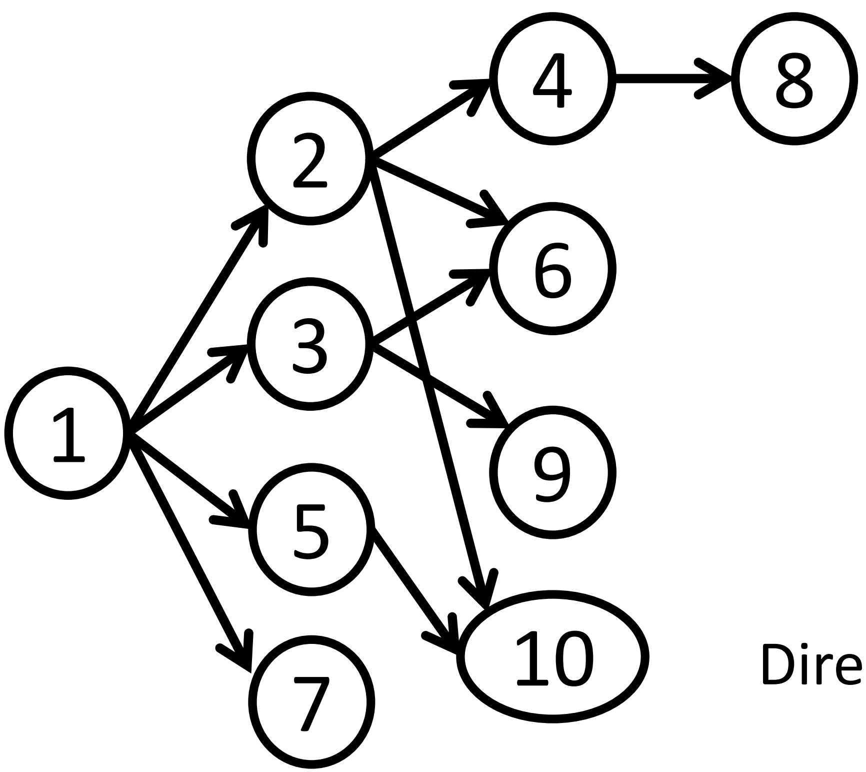
と書く。

aの直後にbがある(immediate successor)とも言う

- $a \ll b$ ことは、$a \prec b$であって、$a \prec x \prec b$となるようなxが存在しない、と同義である。

有限順序集合を ≪ の関係で図示する(基礎的考え方)

- 単一集合上の関係は、有向グラフを使って表現可能
- 例題: A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}に対し、整除関係による順序を考える



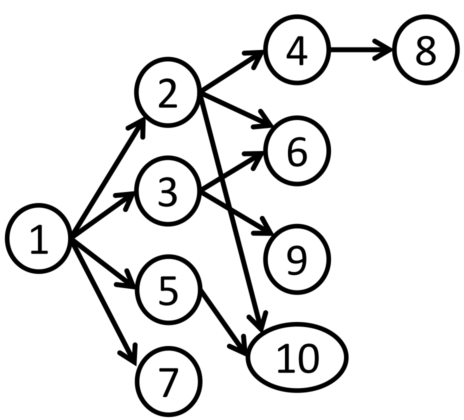
考え方

1|2 → 1|x|2 ?　(x=1, x=2は除く)
1|3 → 1|x|3 ?　(x=1, x=3は除く)
1|4 → 1|x|4 ?　….
(x=2がある)
2|4 → 2|x|4 ?
…
4|8 → 4|x|8 ?
2|10 → 2|x|10 ?

有向非巡回グラフ
Directed Acyclic Graph (DAG)
になっている!!

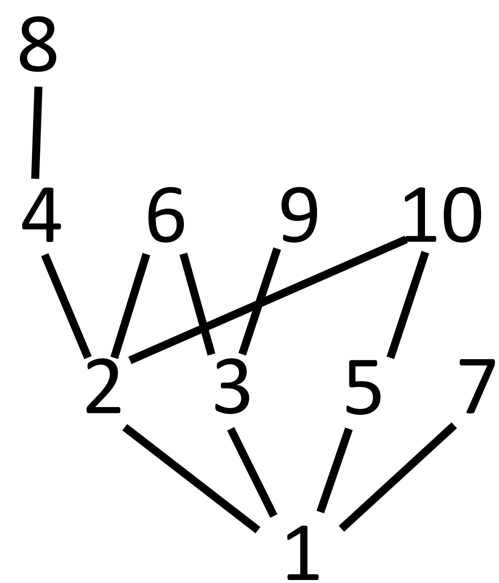
有限順序集合を図示する (一般的な方法)

- ハッセ図 (Hasse Diagram)
- $a \to b$のように矢印を描く代わりに、bをaより高い位置に書き、aとbを線で結ぶ



有向グラフ

⟺

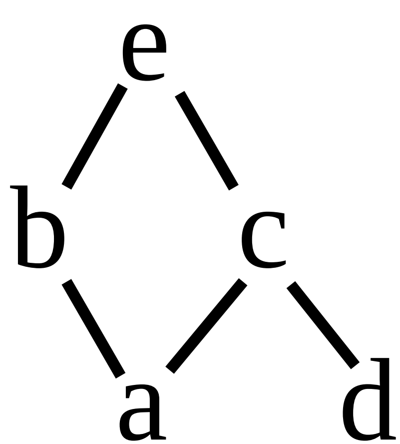


ハッセ図

練習1

- A={a, b, c, d, e}とする。a≪c, d≪c, b≪e, a≪b, c≪e の半順序が定義されているとき、これをハッセ図で図示せよ。

- 解



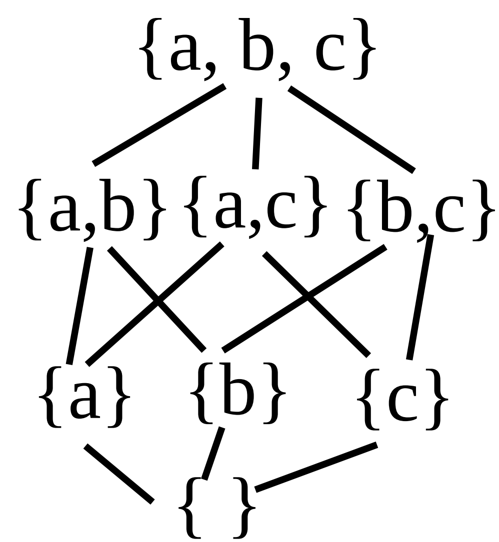
練習2

- $A=\{a, b, c, d, e\}$とする。$a \ll b$, $b \ll c$, $c \ll d$, $d \ll e$ の半順序が定義されているとき、これをハッセ図で図示せよ。

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[d, no head] \\
d \arrow[d, no head] \\
c \arrow[d, no head] \\
b \arrow[d, no head] \\
a
\end{tikzcd}
$$

練習3

- A={a, b, c}とする。べき集合2^A上の包含関係⊂で作られる半順序をハッセ図で図示せよ。
- 解:
  - べき集合 2^A = [{}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}]であるので、包含関係で作られる順序を考えると、次のようになる。



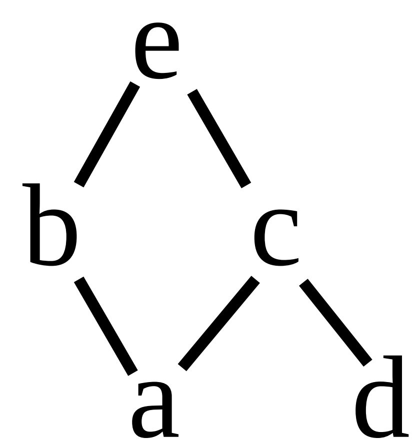
今日のテーマ: 順序集合と束

- 半順序集合
- 直前、直後、図式
- 比較可能、全順序

- 束
  - 結び、交わり、上限、下限
  - 半束
  - 順序の中の束、束の上の順序

比較可能、比較不可能

- 半順序集合上の要素 s, tは、
  必ずしも
  $$s \lesssim t \text{ または } t \lesssim s \cdots (*)$$
  となるとは限らない。



- 例：右図において、a とdの関係は
  ($a \lesssim d$ または $d \lesssim a$)でない

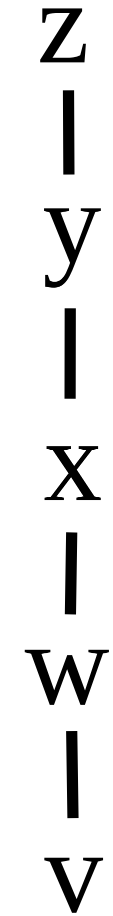
- (*) であるとき、sとtは比較可能である、と言う。それ以外の場合、sとtは比較不可能である、という。

全順序（線形順序、鎖）

- 半順序($\lesssim$)で、集合Aのすべての要素の対が比較可能

    ⇔ Aは全順序集合 (Totally Ordered Set)

- 全順序の別名
    - 線形順序 (Linearly Ordered)
    - 鎖 (Chain)



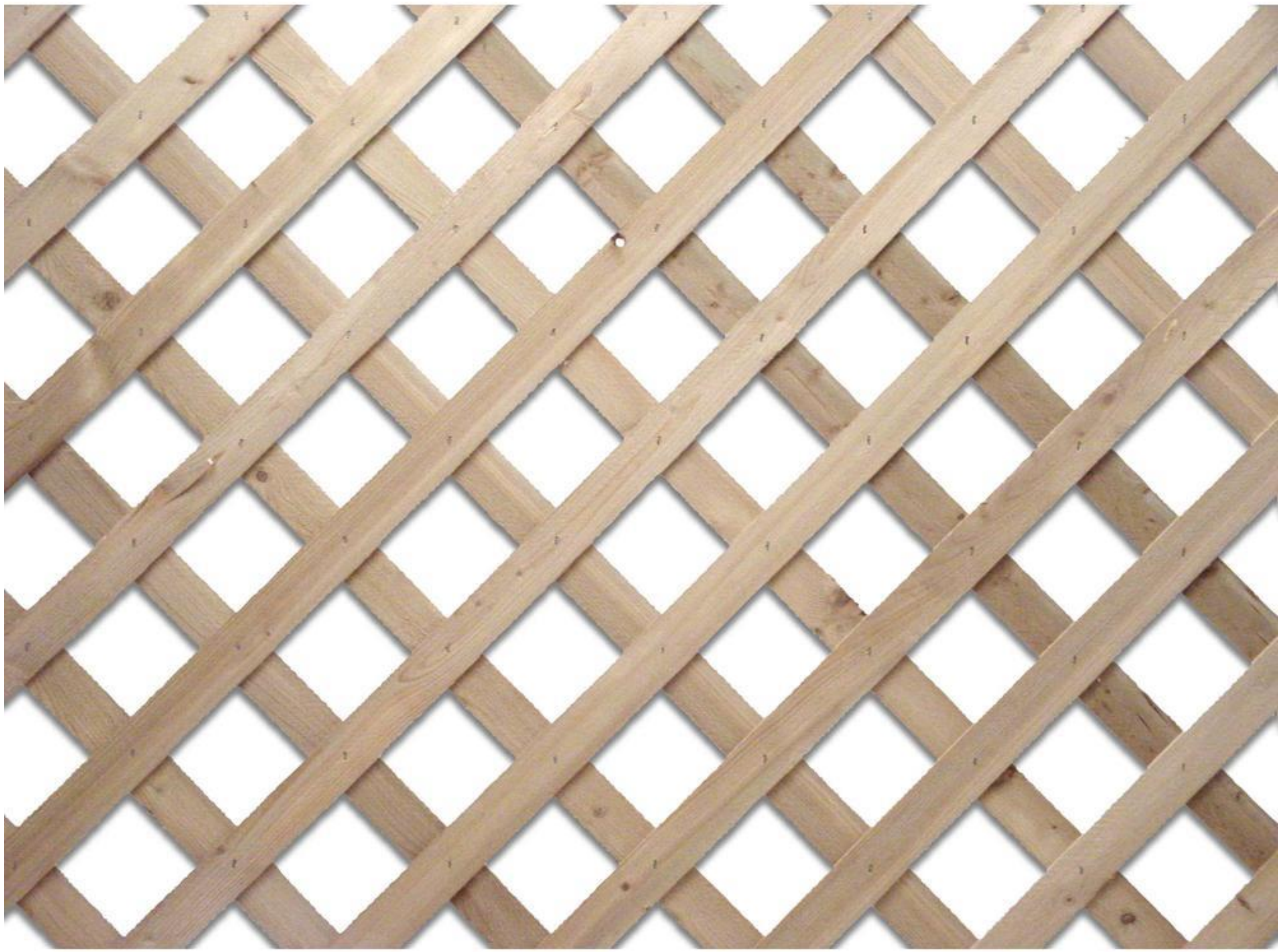
全順序集合の例

今日のテーマ: 順序集合 と 束

- 半順序集合
- 直前、直後、図式
- 比較可能、全順序

- 束
  - 結び、交わり、上限、下限
  - 半束
  - 順序の中の束、束の上の順序

束 (Lattice)



鎖 (Chain)

引用： http://www.homedepot.ca/product/4-feet-x-8-feet-western-red-cedar-lattice/935813
http://copytomcat.cocolog-nifty.com/photos/uncategorized/2012/06/04/01.jpg

束(Lattice)の代数的な定義

- 集合Lを、交わり(meet)、結び(join)と呼ぶ、2項演算子 $\wedge$ と $\vee$ のもとで閉じている、空でない集合とする。

  このとき、Lが束であるのは、$\forall a, b, c \in L$ に対して、

- 交換律

  (1a) $a \wedge b = b \wedge a$　　(1b) $a \vee b = b \vee a$

- 結合律

  (2a) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$　　(2b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

- 吸収律

  (3a) $a \wedge (a \vee b) = a$　　(3b) $a \vee (a \wedge b) = a$

  が成り立つときである（そして、これを束の公理とする）。

- 束Lのことを、$(L, \wedge, \vee)$と表すことがある。

結び (Join)とは何か？ (1/3)

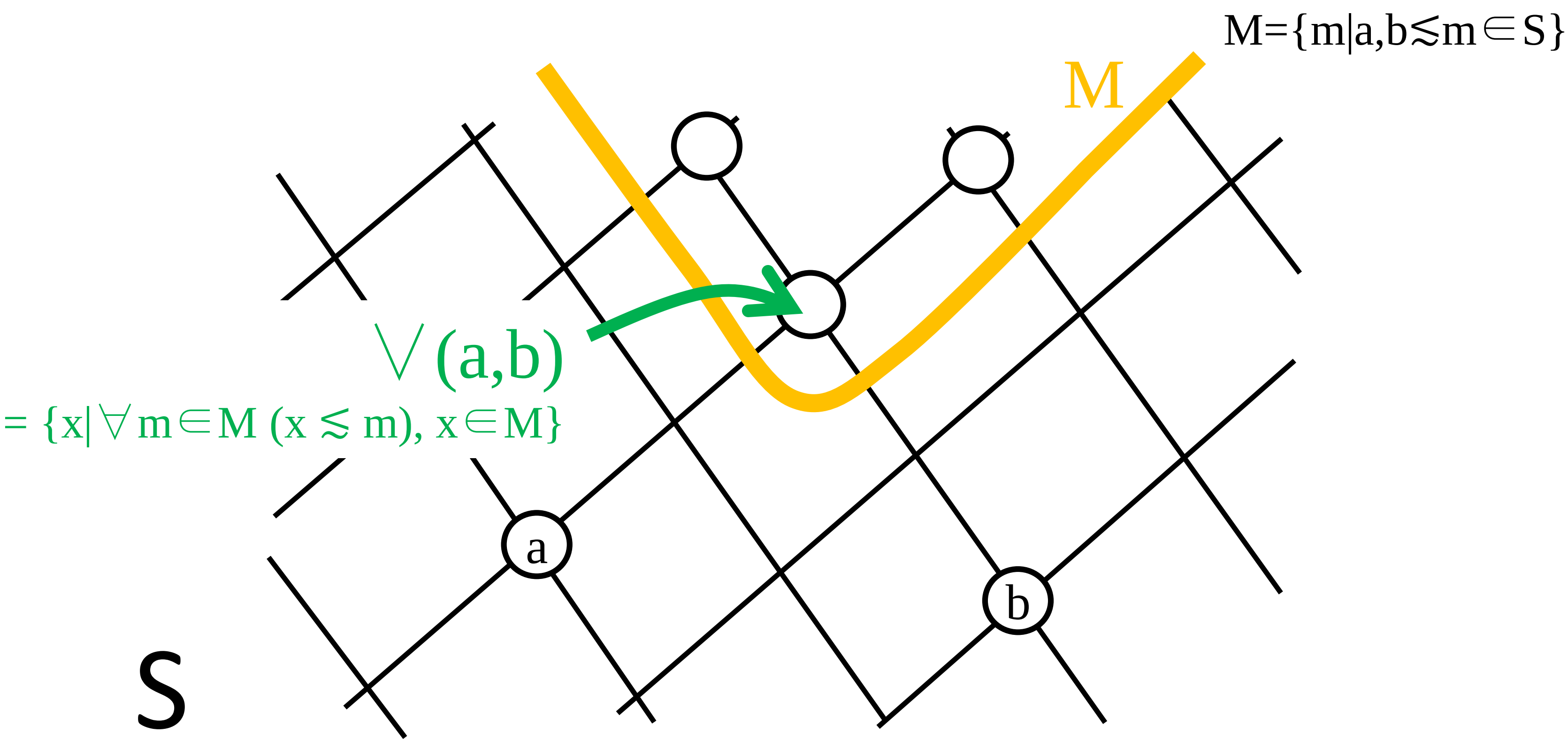
- 演算記号: $\vee$
  - 便宜上、以下、$a \vee b$ を $\vee(a, b)$ と表現する

- 半順序集合における$\vee$の定義として、以下を考える:
  - Sを半順序集合とし、$\{a, b\}$ をSの部分集合とする、いま、$a, b \lesssim m$ が成り立つすべての$m \in S$をMとするとき、すべての$m \in M$に対し、$x \lesssim m$ が成り立つ$x \in M$があれば、それを$\vee(a,b)$ とする。
  - $\vee(a,b) = \{x | \forall m \in M \ (x \lesssim m), x \in M\}, M=\{m \mid a,b \lesssim m, m \in S\}$

- 重要:
  - 上記において、Mは$\{a, b\}$の上界の集合であり、$\vee(a,b)$は$\{a, b\}$の上限(supremum)と言われる。
  - 上限は、通常は、$\sup(a,b)$と表記する。
    - つまり、上記の定義のもとでは、$a \vee b = \sup(a,b)$ である。
  - $\vee(a,b)$は、高々一つであり、存在しないこともある。

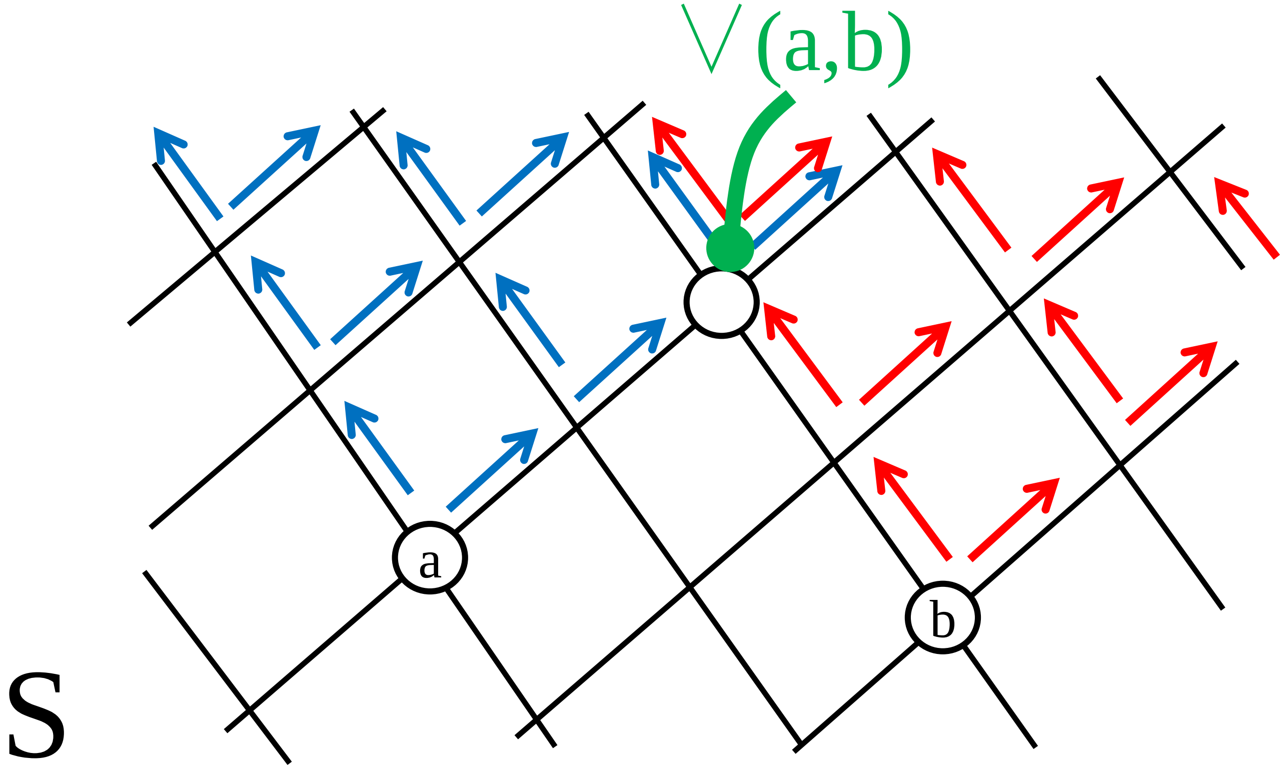
結び (Join)とは何か？ (2/3)

- ∨を、ハッセ図上で捉えてみる
  - $\vee(a,b) = \{x \mid \forall m \in M\ (x \lesssim m),\ x \in M\}$, $M = \{m \mid a,b \lesssim m,\ m \in S\}$



結び (Join)とは何か？ (3/3)

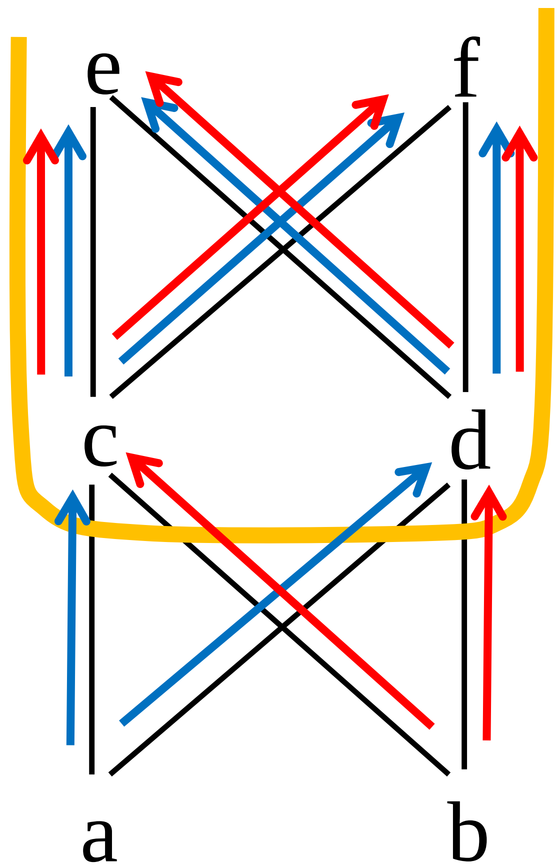
- ∨を、上方向(後方)に働く力、と捉えてみる。
  - 要素a, b、それぞれの後方を考えていく。
  - 要素a, bからの両方の力が重なる場所に、∨(a,b)の結果がある。
    - ただし、それらの場所の中で、（順序が比較可能で）最小であるもの



a∨b = sup(a,b) が存在しない例

- 右図の順序集合において∨(a,b)を考える。
  {a,b}の上界は{c,d,e,f}である。
  しかし、cもdも上限ではない。
  そして、上限は存在しない。

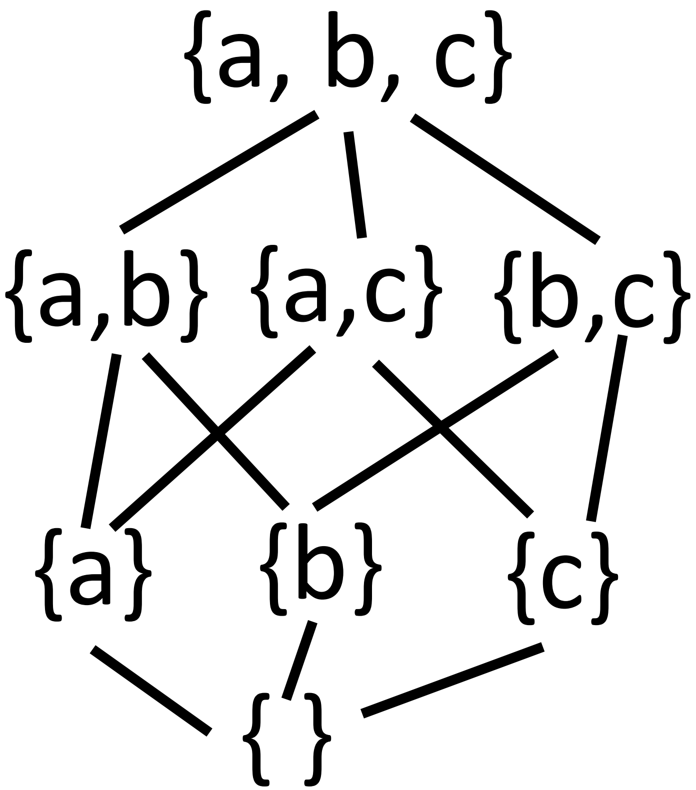
- 理由：
  仮にcを上限としてみる。このとき、
  c≲dが成立しなければならない。
  右図の場合では、cとdは比較不可能であり、これは成立しない。
  また、dを上限と仮定した場合も同様のことが言える。



練習1

- 右図の半順序集合Lにおいて、
  - sup({a}, {b})
  - sup({a,b}, {b,c})
  - sup({a}, {b,c})
  - sup({}, {a,b})
  - sup({a}, {a,b,c})
  - sup({a}, {a})

  をそれぞれ求めよ。



- 解:
  - sup({a}, {b}) = {a,b}
  - sup({a,b}, {b,c}) = {a,b,c}
  - sup({a}, {b,c}) = {a,b,c}
  - sup({}, {a,b}) = {a,b}
  - sup({a}, {a,b,c}) = {a,b,c}
  - sup({a}, {a})={a}

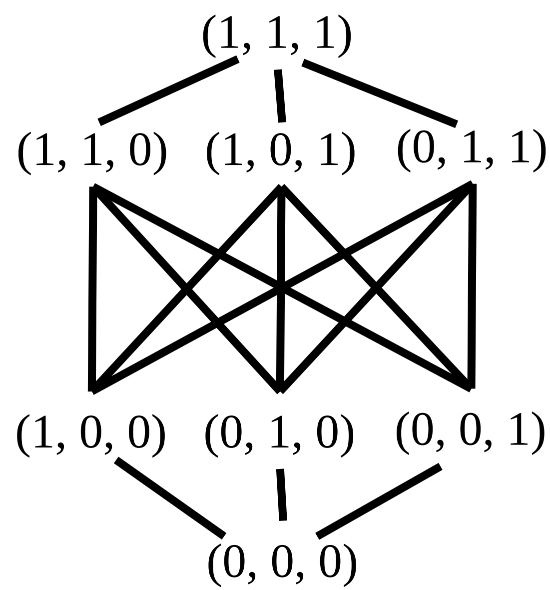
練習2

- 右図の半順序集合Pにおいて、
  - (1,0,0) ∨ (0,1,0)
  - (1,1,0) ∨ (0,1,1)
  - (1,0,0) ∨ (0,1,1)
  - (0,0,0) ∨ (1,1,0)
  - (1,0,0) ∨ (1,1,1)
  - (1,0,0) ∨ (0,0,0)

  をそれぞれ求めよ。

  (ただし、ここでの∨は、

  Pの部分集合に対するsupの意味とする)



- 解:
  - (1,0,0) ∨ (0,1,0) ： 存在しない
  - (1,1,0) ∨ (0,1,1) = (1,1,1)
  - (1,0,0) ∨ (0,1,1) = (0,1,1)
  - (0,0,0) ∨ (1,1,0) = (1,1,0)
  - (1,0,0) ∨ (1,1,1) = (1,1,1)
  - (1,0,0) ∨ (0,0,0) = (1,0,0)

交わり (meet)とは何か？

- 結び (Join)に対し、逆順序で定義されるもの。

- 結び(Join):
  $\vee(a,b) = \{x | \forall m \in M\ (x \lesssim m),\ x \in M\},\ M=\{m | a,b \lesssim m,\ m \in S\}$

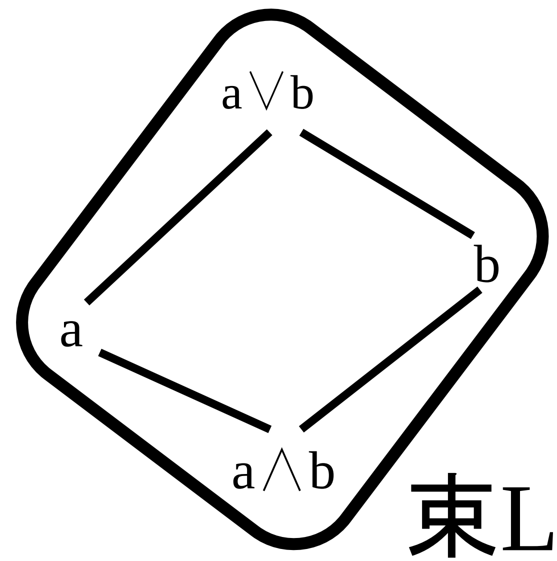
- 交わり (Meet):
  $\wedge(a,b) = \{x | \forall m \in M\ (x \gtrsim m),\ x \in M\},\ M=\{m | a,b \gtrsim m,\ m \in S\}$

- 上限(supremum): $\vee(a,b) = \sup(a,b)$
- 下限(infimum): $\wedge(a,b) = \inf(a,b)$

束の特徴

- 束$(L, \wedge, \vee)$ は
  $\wedge$および$\vee$のもとで閉じている
  必要があった。

- 集合Lが、$\wedge$のもとで閉じているとは、
  $\forall a,b \in L,\ a \wedge b \in L$
- 集合Lが、$\vee$のもとで閉じているとは、
  $\forall a,b \in L,\ a \vee b \in L$
- つまり、束$(L, \wedge, \vee)$には、
  $\forall a,b \in L,\ a \wedge b \in L,\ a \vee b \in L$
  という制限がある

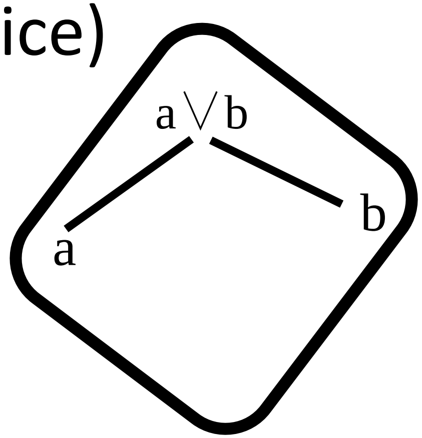


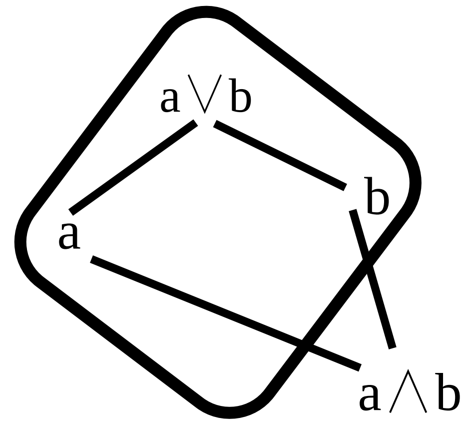
半束

- 結び半束 (join-semilattice)

  $\forall a,b \in L,\ a \vee b \in L$

  であるとき

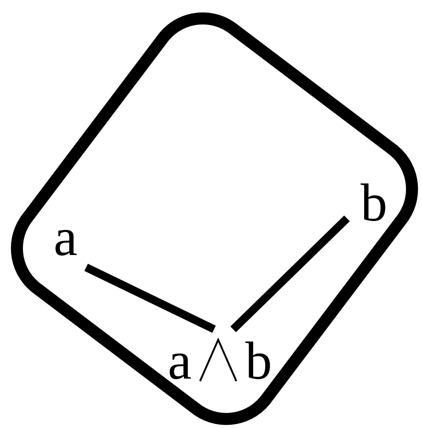


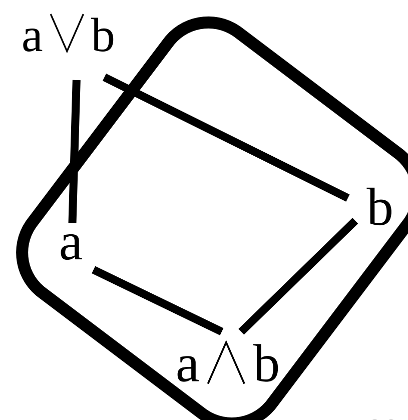


- 交わり半束(meet-semilattice)

  $\forall a,b \in L,\ a \wedge b \in L$

  であるとき





順序集合の中の束 (1/2)

- $\vee$ の定義の時に、半順序$\leqslant$を用いていたことを思い出そう。その定義は簡略すると、

  $a \vee b = \sup(a,b)$: (半順序集合における)上限

  $a \wedge b = \inf(a,b)$: (半順序集合における)下限

  であった。

- 実は、束とは、任意の要素a, bの対に対して、

  $a \vee b = \sup(a,b)$ と $a \wedge b = \inf(a,b)$

  が存在する半順序集合のことである。

順序集合の中の束 (2/2)

- 半順序集合Pの、任意の要素a, bの対に対して、

$$a \vee b = \sup(a,b) \text{ と } a \wedge b = \inf(a,b)$$

が存在すれば、Pは束(P, ∧, ∨)である。

- 理由（詳細な証明は割愛するが）:
  任意の要素a, bの対に対して $a \vee b = \sup(a,b)$ と $a \wedge b = \inf(a,b)$ が存在すれば、

1. $\sup(a,b)=\sup(b,a)$なので、
   交換律: $a \vee b = b \vee a$
2. $\sup(\sup(a,b), c) = \sup(a, \sup(b,c))$ なので、
   結合律: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. $\sup(a,\inf(a,b))=a$なので、
   吸収律: $a \vee (a \wedge b) = a$

がそれぞれ成立する。双対についても同様。

束の上の順序

- 束Lに対しては、

  $a \vee b = b$ ならば $a \lesssim b$

  という順序を定義することができる。

- $\lesssim$は反射的か？
  - $a \vee a = a$ であるので(次ページで束の公理(吸収律)から証明しよう)、どんなaに対しても$a \lesssim a$であり、$\lesssim$は、反射的である
- $\lesssim$は反対称的か？
  - $a \vee b = b$ かつ $b \vee a = a$ であれば、束の公理(交換律)より、$a=b$ である。つまり、$a \lesssim b$かつ$b \lesssim a$であれば$a=b$であるから、$\lesssim$は反対称的である。
- $\lesssim$は推移的か？
  - $a \vee b = b$ かつ $b \vee c = c$ であれば、$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$ である(結合律)。つまり、$a \lesssim b$かつ$b \lesssim c$であれば$a \lesssim c$ であるから、$\lesssim$は推移的である。

よって、束Lに対しては、$a \vee b = b$ ならば $a \lesssim b$ という順序$\lesssim$を定義することができる。

練習1

- 束の公理を使い、$a \vee a = a$ (べき等律)を示せ

- 解:

$a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee b))$ ($a = a \wedge (a \vee b)$を利用)

$= a \vee (a \wedge c)$ ($c = a \vee b$とおいた)

$= a$ ($a \vee (a \wedge b) = a$を利用)

よって、$a \vee a = a$ である。

練習2

- 束$(L, \wedge, \vee)$において、
  $a \vee b = b$ ならば $a \lesssim b$
  は
  $a \wedge b = a$ ならば $a \lesssim b$
  に置き換えられることを示せ。

- 解:
  - 束の公理(吸収律)より、$a \wedge (a \vee b) = a$ が成り立つ。ここに、$a \vee b = b$を代入すると、$a \wedge b = a$である。逆も同様。つまり、
    $a \vee b = b$ ならば $a \lesssim b$
    は、
    $a \wedge b = a$ ならば $a \lesssim b$
    に置き換えられる。

5月の講義予定

- 5月6日:　命題計算
- 5月13日: 休講 (5月際準備のため)
- 5月16日: ブール代数
- 5月27日: グラフの構造と種類